Terme

© Stefan Müller

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung 2
2. Kommutativgesetz 2
3. Potenzen 4
   3.1. Gleiche Faktoren zusammenfassen 5
   3.2. Summanden zusammenfassen 8
   3.3. Klammerregel bei Addition und Subtraktion 9
   3.4. Produkt einer Summe mit einer Zahl 10

1. Einführung

Terme sind Rechenausdrücke aus Zahlen, Rechenzeichen und sogar Buchstaben. Zahlen und Rechenzeichen solltest du mittlerweile kennen. Bei den Buchstaben spricht man von **Variablen**.

Eine Variable ist wie ein schön verpacktes Geschenk. Es steht vor dir auf dem Tisch und es könnte alles Mögliche drin sein: vielleicht ein Ball, ein Computerspiel oder ein spannendes Buch. Aber nicht enttäuscht sein: In den Variablen-Geschenken sind nur Zahlen drin. Da wir aber vor dem Auspacken nicht wissen, welche Zahl drin ist, **steht die Variable als Platzhalter für alle Zahlen**.

Wenn in deinem Term, also deinem Rechenausdruck zweimal ein "x" vorkommt, weißt du zwar noch nicht, für welche Zahl die Variable steht, aber du kannst sicher sein, dass es jedesmal dieselbe Zahl ist. Wenn ein "x" und ein "y" vorkommen, können die beiden unterschiedlichen Variablen für verschiedene Zahlen stehen. Es können aber auch zufällig die gleichen Zahlen sein.

2. Kommutativgesetz

Jetzt stellen wir uns mal ein paar Variablen auf dem Tisch vor.

Die können wir natürlich beliebig auf dem Tisch vertauschen. Es bleiben immer vier blaue und drei weiße Geschenke bzw. Variablen. Die Reihenfolge in einer Summe (4 blau + 3 weiß) kann vertauscht werden (3 weiß + 4 blau).

Die Erlaubnis zum Vertauschen hält man im Vertauschungsgesetz fest. Man nennt es auch **Kommutativgesetz**. Der Name kommt übrigens vom lateinischen „commutare“ für „vertauschen“.
Das gilt aber nicht nur für Summen. Auch für Produkte gilt das Kommutativgesetz. Es ist ja egal, ob man 5 mal 2 Euro oder 2 mal 5 Euro bekommt.

Beide Kommutativgesetze gelten natürlich nicht nur für Zahlen, sondern auch für Variablen.

Bei einer Summe kann man beliebig Summanden vertauschen. Allgemein schreibt man für beliebige Zahlen a und b:

$a + b = b + a$ *Beispiel:* $12 + 6 = 6 + 12 = 18$

Bei einem Produkt kann man beliebig Faktoren vertauschen. Allgemein schreibt man für beliebige Zahlen a und b:

$a \cdot b = b \cdot a$ *Beispiel:* $12 \cdot 6 = 6 \cdot 12 = 72$

3. Potenzen

Als Variablen kann neben einem normalen x auch mal ein x^2 vorkommen. Was kann man sich darunter vorstellen?

Gehen wir erst mal einen Schritt zurück. Mathematiker sind ein wenig faul und daher versucht man die Addition

$$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =$$

kürzer zu schreiben. Das ist natürlich kein Problem. Das sind 25 Zweier. Und man schreibt kürzer $25 \cdot 2$.

$$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 25 \cdot 2 = 50$$

Du kannst **aus einer langen Addition gleicher Zahlen einfach eine kurze Multiplikation machen** und einiges an Schreibarbeit ersparen. Das funktioniert sogar mit Variablen. Berechnen kann man den Term zwar nicht, aber zusammenfassen und kürzer schreiben.

$$x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x = 25 \cdot x$$

Geht das mit dem Zusammenfassen einer Multiplikation auch? Schaut man sich das Produkt

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

an, so kann man 10 mal abwechselnd „2“ und „mal“ im Taschenrechner eingeben. Du kannst aber auch hier **aus einer langen Multiplikation gleicher Zahlen einfach eine kurze Potenz machen**. Die Mathematiker haben sich dazu eine kürzere Schreibweise ausgedacht.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$$

Mit Variablen geht es auch. Auch hier kann man den Wert wieder nicht berechnen, aber kürzer schreiben.

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^{10}$$

So man kann direkt schon eine erste Rechenregel für die Vereinfachung von Termen formulieren.

3.1. Gleiche Faktoren zusammenfassen

Bei Produkten, also Multiplikationsaufgaben, kann man gleiche Faktoren zu Potenzen zusammenfassen.

Beispiele:

$x \cdot x \cdot x = x^3$

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = x^4 \cdot y^2$

Um später besser zu sehen, welche Summanden sich zusammenfassen lassen, sortiert man die Variablen in einem Produkt alphabetisch.

Summanden zusammenfassen

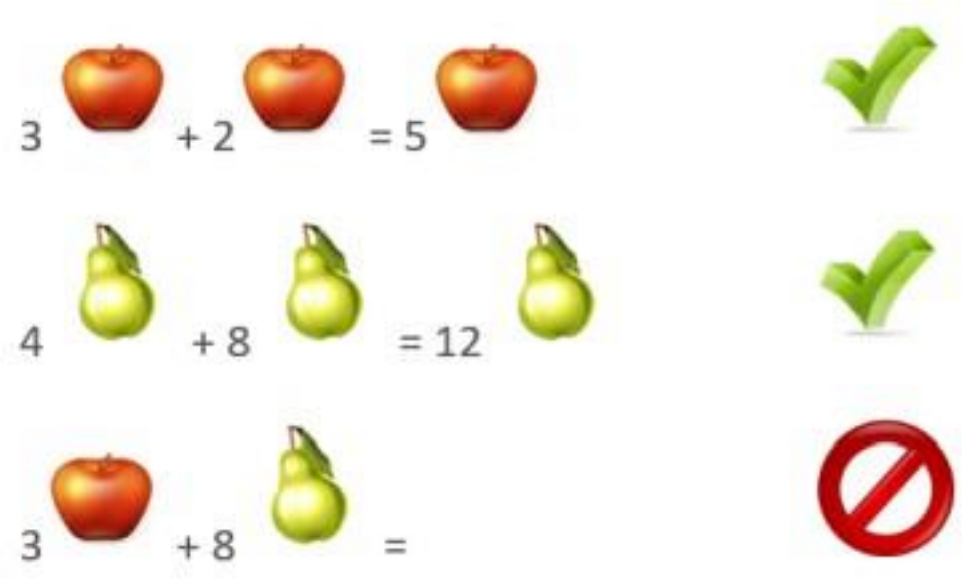
Gleiche Faktoren kann man zu Potenzen zusammenfassen, aber bei den Aufgaben im Mathebuch kommen natürlich Plus, Minus und Mal gemischt vor. Bei verschiedenen Rechenzeichen muss man ganz genau aufpassen, in welcher Reihenfolge man vorgehen muss und was man zusammenfassen darf.

Die Reihenfolge "Punkt vor Strich!" aus der Grundschule kann man dabei noch etwas erweitern. Plus und Minus sind weiterhin Looser und kommen als Letztes. Mal und Geteilt sind cooler, aber es geht noch wichtiger. Als erstes muss man sich die Klammern vornehmen und danach kommen die Potenzen.

Nimmt man die Anfangssilben von "Klammer, Potenz, Punkt, Strich" zu einem Wort zusammen erhält man **KLA-PO-PU-STRI**. Das hört sich nach einem lustigen Wesen an. Ist es auch. Betrachte das folgende Klapopustri und du wirst die Reihenfolge nie mehr vergessen.

Hat man alle Klammern, Potenzen und Multiplikationsaufgaben vereinfacht, so ist es wichtig, dass man weiß, was man am Ende zusammenfassen darf.

Wie im Alltag auch, kannst du nur gleiche Dinge zusammenfassen. Aus drei Äpfeln und zwei Äpfeln kannst du logischerweise fünf Äpfel machen. Steht auf deinem Einkaufszettel aber, dass du drei Äpfel und acht Birnen mitbringen sollst, kannst du nicht nur 11 Obst draufschreiben.



Man darf also nur gleiche Dinge addieren oder subtrahieren.

Hat man aber Ausdrücke wie x^2, xy, x^2y, xy^2 vor sich, dann stellt sich die Frage, welche man denn hier zusammenfassen darf.

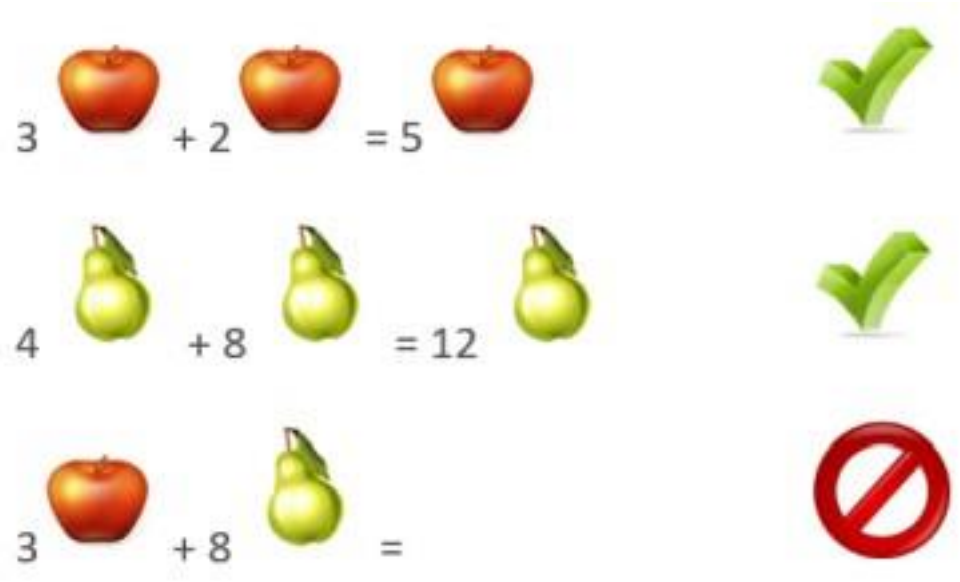
Gleiche Faktoren kann man zu Potenzen zusammenfassen, aber bei den Aufgaben im Mathebuch kommen natürlich Plus, Minus und Mal gemischt vor. Bei verschiedenen Rechenzeichen muss man ganz genau aufpassen, in welcher Reihenfolge man vorgehen muss und was man zusammenfassen darf.

Die Reihenfolge "Punkt vor Strich!" aus der Grundschule kann man dabei noch etwas erweitern. Plus und Minus sind weiterhin Looser und kommen als Letztes. Mal und Geteilt sind cooler, aber es geht noch wichtiger. Als erstes muss man sich die Klammern vornehmen und danach kommen die Potenzen.

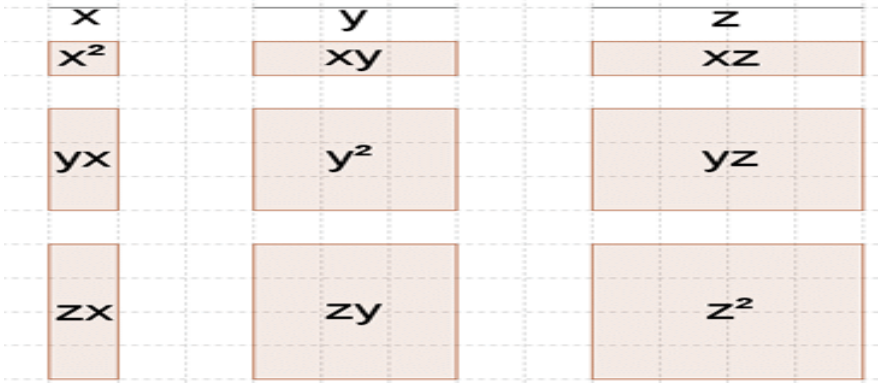
Nimmt man die Anfangssilben von "Klammer, Potenz, Punkt, Strich" zu einem Wort zusammen erhält man **KLA-PO-PU-STRI**. Das hört sich nach einem lustigen Wesen an. Ist es auch. Betrachte das folgende Klapopustri und du wirst die Reihenfolge nie mehr vergessen.

Hat man alle Klammern, Potenzen und Multiplikationsaufgaben vereinfacht, so ist es wichtig, dass man weiß, was man am Ende zusammenfassen darf.

Wie im Alltag auch, kannst du nur gleiche Dinge zusammenfassen. Aus drei Äpfeln und zwei Äpfeln kannst du logischerweise fünf Äpfel machen. Steht auf deinem Einkaufszettel aber, dass du drei Äpfel und acht Birnen mitbringen sollst, kannst du nicht nur 11 Obst draufschreiben.



Man darf also nur gleiche Dinge addieren oder subtrahieren.
Hat man aber Ausdrücke wie x^2, xy, x^2y, xy^2 vor sich, dann stellt sich die Frage, welche man denn hier zusammenfassen darf.
Seien x, y und z beispielsweise unterschiedliche Längen, dann handelt es sich bei x^2 oder $x \cdot y$ um eine Fläche (Länge mal Breite) und bei x^3, x^2y oder xyz um ein Volumen (Länge mal Breite mal Höhe).
Es ist klar, dass man keine Fläche mit einem Volumen zusammenfassen kann, also lassen sich x^2 und x^3 natürlich nicht zusammenfassen. Auch wenn es sich bei x^2y und xy^2 beidesmal um ein Volumen handelt, so handelt es sich doch um unterschiedliche Formen und können auch nicht zusammengefasst werden.
Bei xy und yx hingegen handelt es sich um dieselbe Fläche. Das fällt sofort auf, wenn wir nach dem Kommutativgesetz die Faktoren in alphabetischer Reihenfolge aufschreiben. Dann ist: $xy + yx = xy + xy = 2xy$



Diese Betrachtungen führen zur folgenden Regel:

3.2. Summanden zusammenfassen

Man darf Summanden zusammenfassen, bei denen gleiche Variablen in den gleichen Potenzen vorkommen.

Beispiele:

$2x + 3x = 5x$

$3x^2 + 4x^2 = 7x^2$

Zusammenfassend gilt für das Vereinfachen von Summen:

Vorgehen für das Vereinfachen von Summen

$$3\,yxy + 4\,xy + 5\,y^2x + 7x^2y + 2\,yx$$

1. Suche nach den Rechenzeichen Plus und Minus, da diese als letztes zu rechnen sind. Betrachte die Terme dazwischen.

$$= 3\,yxy + 4\,xy + 5\,y^2x + 7x^2y + 2\,yx$$

2. Sortiere in den einzelnen Summanden die Variablen alphabetisch (Kommutativgesetz). Fasse dabei gleiche Variablen zu Potenzen zusammen. Finde anschließend gleiche Summanden.

$$= 3\,xy^2 + 4\,xy + 5\,xy^2 + 7x^2y + 2\,xy$$

3. Sortiere die passenden Summanden (Kommutativgesetz)

$$= 3\,xy^2 + 5\,xy^2 + 4\,xy + 2\,xy + 7x^2y$$

4. Fasse gleiche Summanden zusammen

$$= 8\,xy^2 + 6\,xy + 7x^2y$$

3.3. Klammerregel bei Addition und Subtraktion

Werden innerhalb eines Termes Klammern addiert oder subtrahiert, so kann es sinnvoll sein, den Term ohne Klammern zu schreiben.

Bei der **Addition** ist das schon mal kein Problem. Befindet sich ein **+ vor der Klammer**, dann darf man die Klammern in diesem Fall einfach weg lassen.

$3 + (x + 4) = 3 + x + 4$

Werden innerhalb eines Termes Klammern addiert oder subtrahiert, so kann es sinnvoll sein, den Term ohne Klammern zu schreiben.

Bei der **Addition** ist das schon mal kein Problem. Befindet sich ein **+ vor der Klammer**, dann darf man die Klammern in diesem Fall einfach weg lassen.

$3 + (x + 4) = 3 + x + 4$

Bei der **Subtraktion** darf man das nicht so einfach. Befindet sich ein **- vor der Klammer** und man will die Klammer weglassen, so muss man alle Plus- und Minuszeichen in der Klammer umdrehen. Aus Plus wird Minus und aus Minus wird Plus.

$3 - (x + 4) = 3 - x - 4$

Die vier Fälle, die auftreten können, finden sich in den folgenden Klammerregeln:

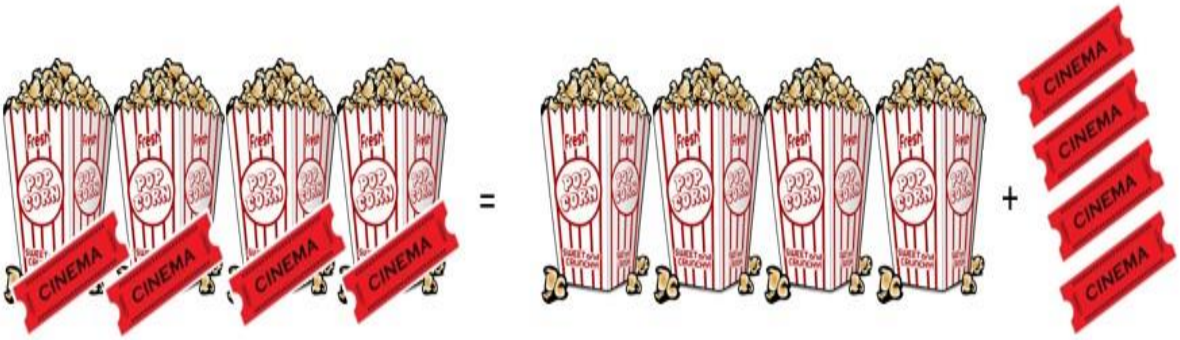
Klammerregeln bei Addition und Subtraktion

$a + (b + c) = a + b + c$
$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

3.4. Produkt einer Summe mit einer Zahl

Das Produkt einer Summe mit einer Zahl lässt sich anschaulich an einem Kinobesuch in Kaiserslautern zeigen.



Gehen wir davon aus, dass 4 Freunde einen gemütlichen Kinobesuch planen. Sie gehen ins Central Kino in der City und kaufen an der Kasse viermal das Kombipaket aus Ticket und Popcorn.

Beim nächsten Kinobesuch entscheiden sie sich für das UCI am Stadtrand. Dort sind die Kassen für den Eintritt und die Verpflegung getrennt. Also kaufen die 4 Freunde am Eingang erst viermal ein Ticket, um anschließend im oberen Stockwerk vier Popcorn-Tüten zu kaufen.

Natürlich ist es klar, dass beide Kinobesuche gleich viel Geld gekostet haben und so haben wir eine schöne Gleichung, die uns den Sachverhalt veranschaulicht.

Jetzt mathematisieren wir diesen Zusammenhang und schreiben:

4 · (Ticket + Popcorn) = 4 · Ticket + 4 · Popcorn

Ist eigentlich klar. Trotzdem vergessen Schüler oft, dass auch der zweite Summand in der Klammer mit dem Vorfaktor (hier der 4) multipliziert werden muss. Vergisst man das im Kino, so würde das dazu führen, dass die vier Freunde nur eine Popcorntüte haben und es Streit gibt. Vergisst man es in der Mathearbeit, dann führt es dazu, dass man Punkte abgezogen bekommt.

Man kann sich das Rechengesetz aber auch an dem folgenden Hasenkäfig veranschaulichen.

Unser Hase ist aber sehr anspruchsvoll und hätte gerne einen Teil mit Klee und einen Teil mit Löwenzahn bepflanzt. Betrachten wir die beiden Flächen, die zusammen natürlich die gesamte Käfigfläche ergeben: Die Fläche Klee entspricht a · b, die Fläche Löwenzahn a · c.

Es gilt:

Gesamtfläche = Fläche Klee + Fläche Löwenzahn

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Und schon steht das Distributivgesetz da.

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Beispiel:

$3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$

$a \cdot (a - 3) = a \cdot a - a \cdot 3 = a^2 - 3a$