Mithilfe der Integralrechnung kann man das Volumen eines Körpers berechnen, der entsteht, wenn die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse innerhalb eines gegebenen Intervalls um die x-Achse rotiert.

Das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich durch die Addition unendlich zylinderförmiger Scheiben, bei denen der Radius dem Funktionswert und die Höhe der Länge des Intervalls entspricht. Da die Scheiben unendlich dünn sind, dürfen sie als Zylinder betrachtet werden, deren Höhe gegen 0 geht.

Aus der Formel zur Berechnung des Volumens eines Zylinders ergibt sich:

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h.$

Mit $r \triangleq y$ und h ≙ b – a ≙ dx folgt:

$V = \pi \cdot y^2 \cdot dx$

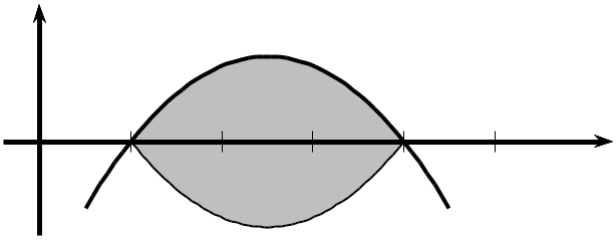
Lässt man nun die Höhe dx der einzelnen Zylinder gegen 0 streben, so entspricht das Volumen des Rotationskörpers dem Integral

$$V = \int_a^b (\pi \cdot f(x)^2)\, dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Es ist dabei zu achten, dass vor dem Bilden der Stammfunktion quadriert wird!

Beispiel:

Eine Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + 5x + 4$ wird im Bereich zwischen den Nullstellen um die x - Achse rotiert, wie nebenstehend dargestellt. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.



Bestimme zuerst die Integrationsgrenzen. Dies sind gerade die Nullstellen der Funktion. Setze $f(x) = 0$ ➔ $-x^2 + 5x - 4 = 0$. Es errechnen sich die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

Das Volumen errechnet sich wie folgt:

V = $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)^2\, dx$ | quadrieren vor Bilden der Stammfunktion!

$= \pi \cdot \int_1^4 (x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16)\, dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{10x^4}{4} + \frac{33x^3}{3} - \frac{40x^2}{2} + 16x\right]_1^4$

$= \pi \cdot (\frac{4^5}{5} - \frac{10 \cdot 4^4}{4} + 11 \cdot 4^3 - 20 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4) - (\frac{1^5}{5} - \frac{10 \cdot 1^4}{4} + 11 \cdot 1^3 - 20 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1)$

$= \pi \cdot (12{,}8 - 4{,}7) \approx 8{,}1\, \pi\, VE$