Grundlagen der Integralrechnung

© Wolfgang Kippels

1 Vorwort 2

2 Das unbestimmte Integral 3

2.1 Aufgaben 5

3. Das bestimmte Integral 6

3.1. Beispielaufgaben 9

3.2. Aufgaben 13

4. Rotationskörper 16

4.1. Herleitung der Berechnungsformel 16

4.2. Übungsaufgaben 21

5. Lösungen der Übungsaufgaben 25

5.1. Lösungen zu 3.2. 25

5.2. Lösungen zu Aufgabe 1 a) 27

5.3. Lösungen zu 4.2. 53

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen "Generationenvertrages":

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter*.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Das unbestimmte Integral

Am Beispiel eines Polynoms wollen wir das sogenannte *unbestimmte Integral* herleiten. Gegeben sei die Funktion $f(x)$ sowie deren Ableitung $f'(x)$.

$$f(x) = a \cdot x^n$$
$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Nun stellen wir uns vor, wir kennen nur $f'(x)$ und fragen uns, von welcher Funktion diese Funktion $f'(x)$ als Ableitung *abstammen* könnte. Man nennt diese gesuchte Funktion daher auch *Stammfunktion*. Wenn die gegebene Funktion nicht $f'(x)$, sondern $f(x)$ heißt, dann verwendet man fur die Stammfunktion die Bezeichnung $F(x)$. Damit ist dann:

$f(x) = F'(x)$

Kommen wir zurück zum Beispiel. Wenn wir zur Funktion $f(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ die **Stammfunktion** $F(x)$ suchen, dann konnte die Lösung lauten: $F(x) = a \cdot x^n$
Möglich sind aber auch noch nachfolgende **Stammfunktionen**:

$$F_1(x) = a \cdot x^n n + 3$$
$$F_2(x) = a \cdot xn + 7$$
$$F_3(x) = a \cdot x - 19$$

Da beim Ableiten immer die Konstante (als Summand) wegfällt, ergäbe sich beim Ableiten stets:

$$F'(x) = f(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Allgemein kann man daher sagen, die Stammfunktion zu $f(x)$ lautet:

$$f(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \Rightarrow F(x) = a \cdot x^n + c$$

Hierbei ist c eine Konstante, die eine beliebige reelle Zahl sein kann.

Kommen wir nun zur Festlegung einiger Begriffe.

Die Umkehrung des *Differenzierens* nennt man *Integrieren*. Da für das *Differenzieren* auch der deutsche Begriff *Ableiten* verwendet wird, kann man umgekehrt zum *Integrieren* auch *Aufleiten* sagen. Dieser Begriff ist zwar nicht allgemein üblich, drückt aber meines Erachtens anschaulich gut die Umkehrung des Ableitens aus. Die Stammfunktion zu einer Funktion *f*(*x*) heißt *unbestimmtes Integral* von f(x).

Unbestimmt, weil die Konstante *c* ja nicht bestimmt werden kann. Hierfür wird folgende Schreibweise verwendet:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Gelesen wird das als *Integral von f von x* d*x*. Die genaue Bedeutung des Kürzels d*x* soll an dieser Stelle nicht erklärt werden (es stammt vom d*x* aus dem *Differenzenquotienten* ab, das das differenziell kleine Δ*x* aus der Steigungsformel darstellt), es reicht an dieser Stelle, wenn man weiß, dass die Funktion vorn durch das Integralzeichen $\int und$ hinten durch das Kürzel d*x* eingeschlossen wird. In unserem Beispiel sieht das dann so aus:

$$\int \underbrace{a \cdot n \cdot x^{n-1}}_{f(x)}\, \mathrm{d}x = \underbrace{a \cdot x^n + c}_{F(x)}$$

Was bedeutet das? Es gibt zu jeder Funktion *f*(*x*) **eine ganze Schar** von Stammfunktionen, die alle *f*(*x*) als Ableitung haben. Da nicht feststellbar ist, welche davon die “richtige“ ist, spricht man vom **unbestimmten** Integral.

Hier einige Grundintegrale wichtiger grundlegender Funktionen, jedoch ohne dass diese hergeleitet werden:

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$
$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$$
$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$$
$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

Darüber hinaus gibt es einige Integrationsregeln, von denen hier nur die beiden wichtigsten angeben werden:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$
$$\int u(x) \pm v(x)\, dx = \int u(x) dx \pm \int v(x)\, dx$$

Weitere Integrationsregeln bzw. Integrationsmethoden finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/int-meth.pdf

2.1 Aufgaben

Bestimmen Sie die nachfolgenden Unbestimmten Integrale!

a) $\int 3 \cdot \cos x \mathrm{d}x =$

b) $\int e \cdot ex \, \mathrm{d}x =$

c) $\int \pi \cdot \sin x \mathrm{d}x =$

d) $\int 15 \mathrm{d}x =$

e) $\int 8x^3 \mathrm{d}x =$

f) $\int 6x^2 + 4x - 3 \mathrm{d}x =$

g) $\int 2x^2 - 6x - 12 \, \mathrm{d}x =$

h) $\int \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + e^x \, dx$

i) $\int \frac{3}{x^3} dx =$

j) $\int \frac{5}{x} dx =$

k) $\int \frac{3x^2}{8x} dx =$

l) $\int \frac{3x+1}{2} dx =$

m) $\int \sqrt{x}\, dx =$

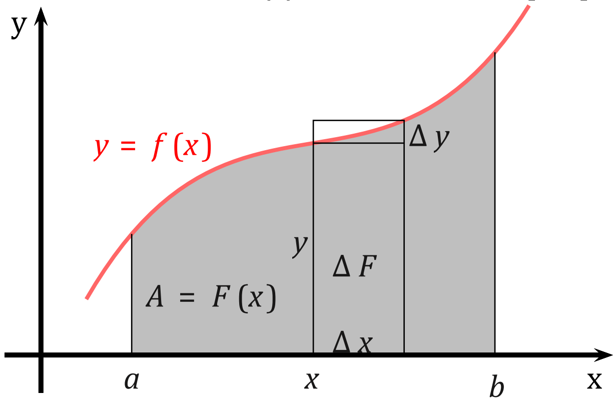
n) $\int \sqrt{x^3}\, dx =$

o) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\, dx =$

Eine wichtige Anwendung für Integrale ist die Bestimmung einer krummlienig begrenzten Fläche. Diese wird mit dem **bestimmten Integral** berechnet. Um zu klären, was dahinter steckt, müssen wir etwas weiter ausholen und mit einem scheinbar völlig anderen Problem beginnen.

3. <u>Das bestimmte Integral</u>

Die Flache *A* unter dem Funktionsgraphen der Funktion *f*(*x*) soll im Intervall [*a*;*b*] berechnet werden. Nebenstehend ist diese Fläche dargestellt. Links wird sie durch *x* = *a* und rechts durch *x* = *b* begrenzt, die untere Begrenzung ist die Abszisse (*x*-Achse) und die obere der Funktionsgraph von *f*(*x*).



Gehen wir davon aus, dass die Fläche, die links bei *a* beginnt und rechts an der Stelle *x* endet (also die linke Teilfläche, natürlich vom rechten Begrenzungswert *x* abhängt. Sie stellt also auch eine Funktion von *x* dar, die wir *A* = *F*(*x*) nennen möchten. Man kann sich leicht vorstellen, dass die Fläche kleiner wird, wenn man *x* nach links verschieben, oder größer, wenn *x* nach rechts bewegt wird.

Betrachten wir nun den eingezeichneten Streifen mit der Breite Δ*x*. Wir erhalten einen kurzen Streifen mit der Höhe *y* und einen etwas längeren mit der Höhe *y* + Δ*y*. Die markierte Fläche unter der Kurve in diesem Streifenbereich nennen wir Δ*F*, denn um diesen Wert würde ja die Flächenfunktion *F*(*x*) anwachsen, wenn *x* um Δ*x* nach rechts verschoben wird. Wie man leicht sieht, ist diese Fläche Δ *F* etwas größer, als der kurze Rechteckstreifen und etwas kleiner, als der längere Rechteckstreifen. Das lässt sich als Ungleichungskette aufschreiben:

$$\underbrace{\Delta x \cdot y}_{kurzer\ Streifen} < \Delta F < \underbrace{\Delta x \cdot (y + \Delta y)}_{langer\ Streifen}$$

Wir dividieren die ganze Ungleichung durch Δx. Das ist erlaubt, denn Δx ist nicht negativ und auch nicht Null und erhalten:

$$y < \frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Machen wir nun den Grenzwertubergang, dass $\Delta\, x \rightarrow 0$ geht, dann wird $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ zu $\frac{dF}{dx}$, was man bekanntlich auch Ableitung $F'(x)$ nennt. Da mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch $\Delta y \rightarrow 0$ geht, laufen der linke und der rechte Term in der Ungleichungskette aufeinander zu. Setzt man noch für $y = f(x)$ ein, dann ergibt sich daraus:

$$\frac{dF}{dx} = y$$

$$F'(x) = f(x)$$

Das bedeutet, dass die Ableitung der Flächenfunktion mit der Funktion, die die obere Begrenzung der Fläche darstellt, übereinstimmt. Macht man die Umkehrung, dann kann man daraus schließen, dass die Flächenfunktion $F(x)$ das *unbestimmte Integral* der Funktion $f(x)$ darstellt.

$$A = \int F`(x)\, dx = \int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Um nun eine **konkrete** Fläche berechnen zu können, müssen wir das c irgendwie in den Griff bekommen. Wir wollen aus dem *unbestimmten* Integral ein *bestimmtes* Integral machen.

An der Stelle a muss die Flächenfunktion genau 0 ergeben. Daraus ergibt sich für die Fläche von a bis x

A(a) = F(a) + c = 0

und A(a,x) = F(x) + c – (F(a) + c)

Wie man leicht erkennen kann, hebt sich das c dabei genau auf. Welchen Wert man dafür einsetzt, ist völlig gleichgültig. Aus Bequemlichkeit können wir also auch mit $c = 0$ weiter rechnen. Fur die Fläche in dem Intervall $[a; b]$ ergibt sich damit:

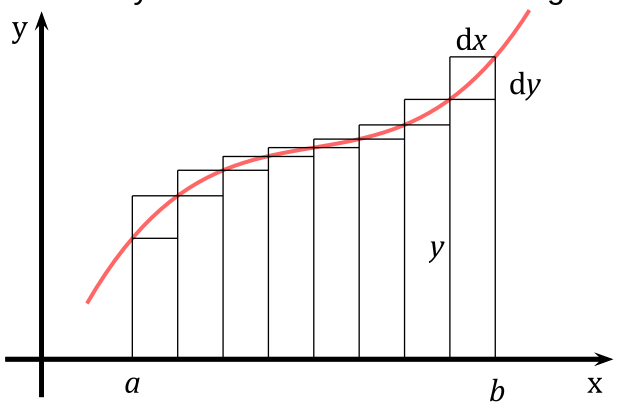
$$A(a,b) = F(b) - F(a)$$

Dieser Zusammenhang wird folgendermaßen geschrieben:

$$A(a;b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Der Term $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt: *Das bestimmte Integral* von *f*(*x*) in den Grenzen von *a* bis *b*.

Zum Schluss möchte ich noch zeigen, woher die Symbole stammen. Dazu zerlege ich die oben angesprochene Flache in *n* Streifen, so dass *n* Rechteckstreifen **unter** und *n* Rechteckstreifen **über** dem Funktionsgraphen enden. Fur $n \to \infty$ geht die Differenz der beiden Rechtecksummen gegen 0. Dann ist die Fläche der oberen Rechtecksumme gleich der Fläche der unteren Rechtecksumme gleich der Fläche unter dem Funktionsgraphen.



Zusammengefasst ist *A* gleich der Summe der *n* Rechtecke von *x* = *a* bis *x* = *b*.

$$A = \sum_{x=a}^{b} y \cdot \mathrm{d}x = \sum_{x=a}^{b} f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Für $n \to \infty$ bzw. d*x* → 0 werden die Rechtecke zum "*y*-Strich"; die Summe aller Rechtecke ist gleich der Summe aller *y*-Werte von *a* bis *b*. Das Summenzeichen $\sum_{x=a}^{b}$ wird beim Grenzwertubergang zum Integralzeichen $\int_a^b$, das d*x* bleibt erhalten.

Hier noch einmal zusammengefasst die Formel fur die Berechnung der Fläache in den Grenzen von *a* bis *b*:

$\boxed{A(a,b) = \int_a^b f(x)dx}$

Auch dies wollen wir uns näher ansehen.

Wir haben gesehen, dass wir die Fläche, die **links** durch *x* = *a*, **rechts** durch *x* = *b*, **unten** durch die Abszisse (*x*-Achse) und **oben** durch den Graphen der Funktion *f*(*x*) begrenzt ist, berechnen konnen durch den Ansatz: A = $\int_a^b f(x)\,dx$. Ausgerechnet wird das dann durch:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

wobei *F*(*x*) eine *beliebige* Stammfunktion von *f*(*x*) ist.

Damit man die Stammfunktion und auch die Grenzen bequem hinschreiben kann, wird noch eine weitere Schreibweise eingeführt. In dem Augenblick, in dem die Stammfunktion aufgeschrieben wird, verwandelt sich das Integralzeichen mit dem abschließenden d*x* in eckige Klammern, wobei die Grenzen an der zweiten Klammer oben und unten angeschrieben werden, etwa so:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

In einem Zahlenbeispiel sieht das dann so aus:

$$\int_2^5 3x^2 - 4x + 5\ \mathrm{d}x = \left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_2^5 = (5^3 - 2\cdot 5^2 + 5\cdot 5) - (2^3 - 2\cdot 2^2 + 5\cdot 2) = \ldots$$

3.1. Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1

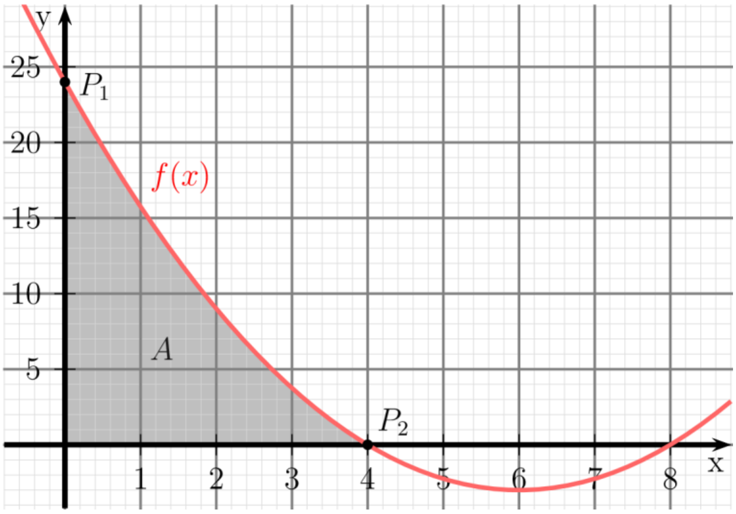
Berechnen Sie die Fläche, die durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 24$$

sowie die Ordinate (*y*-Achse) und die Abszisse (*x*-Achse) begrenzt ist. Fertigen Sie eine Skizze an!

Lösung:

Schritt 1: **Nullstellenbestimmung**
Zunachst müssen die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Abszisse (x-Achse) berechnet werden. Dazu wird die Funktion gleich Null gesetzt.



$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \frac{3}{4}x_0^2 - 9x_0 + 24 &= 0 \quad | \cdot \frac{4}{3} \\ x_0^2 - 12x_0 + 32 &= 0 \\ x_{01/2} &= 6 \pm \sqrt{36-32} \\ x_{01/2} &= 6 \pm 2 \\ x_{01} = 4 & \quad\quad x_{02} = 8 \end{aligned}$$

Schritt 2: **Flächenberechnung**
Die Skizze zeigt, dass fur die gesuchte Fläche die Nullstelle von Belang ist, die **dichter an der Ordinate** (y-Achse) liegt, also hier $x_{01} = 4$. Die untere Grenze ist dann die Ordinate, die bei $x = 0$ liegt. Die Integrationsgrenzen sind damit 0 und 4.

Im untersuchten Bereich liegt f **oberhalb der Abszisse**, darum ist das Integral positiv anzusetzen.

$$
\begin{aligned}
A &= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{allgem. Ansatz}} \\
&= \int_0^4 \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 9x + 24}_{\text{konkrete Funktion}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\underbrace{\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 24x}_{\text{Stammfunktion}}\right]_0^4 \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{4}\cdot 4^3 - \frac{9}{2}\cdot 4^2 + 24\cdot 4\right)}_{\text{obere Grenze eingesetzt}} - \underbrace{\left(\frac{1}{4}\cdot 0^3 - \frac{9}{2}\cdot 0^2 + 24\cdot 0\right)}_{\text{untere Grenze eingesetzt}} \\
A &= 40
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt: A = 40 FE

Beispielaufgabe 2

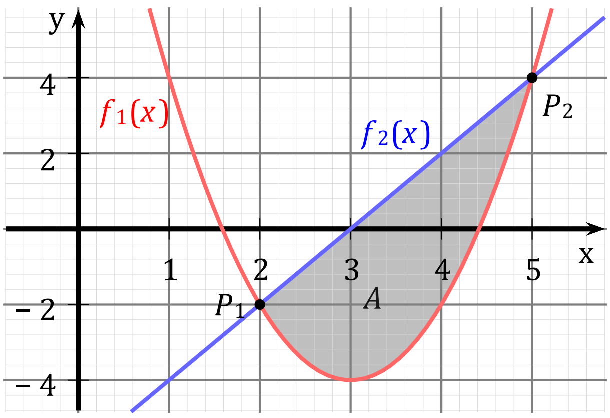
Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 2x^2 - 12x + 14 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x - 6$$

Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen. Skizzieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Zunächst müssen die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen berechnet werden. Dazu werden die Funktionsterme gleichgesetzt:



$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
2x_s^2 - 12x_s + 14 &= 2x_s - 6 \quad | - 2x_s + 6 \\
2x_s^2 - 14x_s + 20 &= 0 \quad | : 2 \\
x_s^2 - 7x_s + 10 &= 0 \\
x_{s1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\
x_{s1/2} &= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_{s1} = 2 & \quad x_{s2} = 5
\end{aligned}$$

Mit diesen beiden Schnittstellen kann nun der Ansatz fur die Flächenberechnung gemacht werden. Die folgende Formel kann dafür verwendet werden:

$$A = \int_{x_1}^{x^2} f_2(x) \; - \; f_1(x)\, dx$$

Hierbei ist zu beachten, dass

- die untere Integrationsgrenze unten ans Integralzeichen und die obere oben ans Integralzeichen gesetzt wird.
- die **untere** Funktion von der **oberen** subtrahiert wird.

In diesem Beispiel stimmen die Indizes zufällig schon. Wir können die Werte also so einsetzen, wie sie sind.

$$
\begin{aligned}
A &= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \overbrace{f_2(x)}^{\text{obere}} - \overbrace{f_1(x)}^{\text{untere}} \,\mathrm{d}x}_{\text{allgemeiner Ansatz}} \\
&= \underbrace{\int_{2}^{5} (2x-6) - \left(2x^2 - 12x + 14\right) \,\mathrm{d}x}_{\text{konkrete Funktionen und Grenzen}} \\
&= \int_{2}^{5} 2x - 6 - 2x^2 + 12x - 14 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{2}^{5} \underbrace{-2x^2 + 14x - 20}_{\text{Zusammenfassung}} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\underbrace{-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 20x}_{\text{Stammfunktion}} \right]_2^5 \\
&= \underbrace{\left(-\frac{2\cdot 5^3}{3} + 7\cdot 5^2 - 20\cdot 5\right)}_{\text{obere Grenze eingesetzt}} - \underbrace{\left(-\frac{2\cdot 2^3}{3} + 7\cdot 2^2 - 20\cdot 2\right)}_{\text{untere Grenzen einsetzt}} \\
A &= 9
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt: A = 9 FE

3.2. Aufgaben

Aufgabe 1

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 0{,}5(x - 2)^2 + 3{,}5$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x + 3$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - x - 12$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse!

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse und der y-Achse!

Aufgabe 4

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Aufgabe 5

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = -x^2 + 7$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Aufgabe 6

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen.

Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt $P(2|240)$. Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Aufgabe 8

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(0|4)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2|0)$. Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven x-Achse, der y-Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

Aufgabe 9

Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verlauft durch die Punkte $P_1(1| - 15)$, $P_2(4|12)$

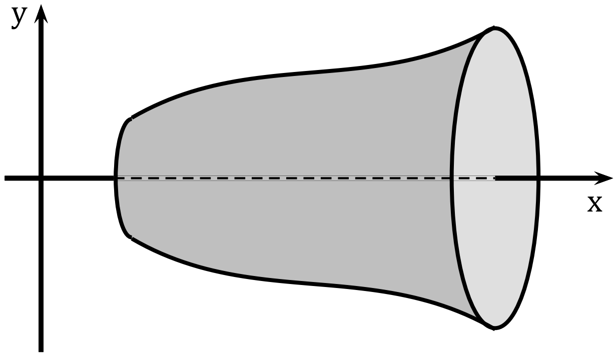
und $P_3(5|9)$. Berechnen Sie die Fläche, welche die x-Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades $f(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x_w = 3$ mit der Wendetangente $y = -6x + 22$. Die y-Achse schneidet der Graph des Polynoms bei $y_0 = -32$. Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$.

4. Rotationskörper

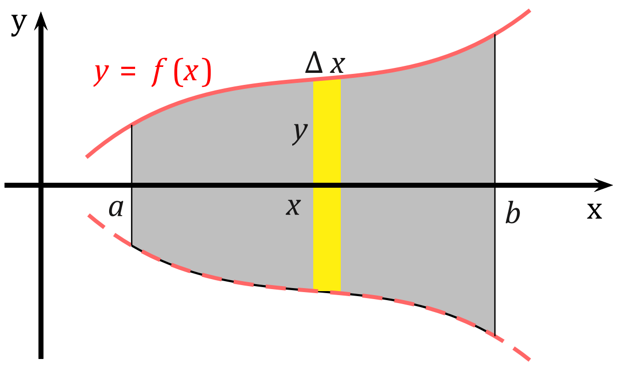
Eine (von vielen) Anwendungen der Integralrechnung sind Rotationskörper. Darunter versteht man Körper, die durch Rotation eines Funktionsgraphen um die Abszisse (*x*-Achse) entstehen. Man könnte sie auf der Drehmaschine herstellen, indem der Drehmeißel den Funktionsgraphen entlangfährt.



Nebenstehend ist ein Beispiel dazu dargestellt. Die Oberkante stellt eine beliebige Funktion $f(x)$ dar. Durch Rotation um die x-Achse beschreibt dieser Funktionsgraph die Oberflache des Drehkörpers. Links und rechts ist der Drehkörper durch einen senkrechten Schnitt begrenzt.

4.1. Herleitung der Berechnungsformel

Nebenstehend ist der Rotationskörper in der Seitenansicht dargestellt. Die Oberkante stellt die Funktion $f(x)$ dar. Spiegelbildlich entsteht dazu durch die Rotation die untere Begrenzungslinie, die man durch $-f(x)$ beschreiben könnte.



Nun stellt man sich vor, dass der Rotationskorper durch eine Anzahl zylinderförmiger Scheiben angenähert wird. Eine solche Scheibe ist in der Skizze stellvertretend fur alle gelb eingezeichnet. Ihr Volumen ist das Produkt aus ihrer Höhe – hier Δx – und ihrer kreisformigen Grundfläche. Dabei ist der Radius der y-Wert, der zum betrachteten *x*-Wert gehört, an der die Scheibe betrachtet wird. Demnach kann die Kreisfläche so bestimmt werden:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot \left(f(x)\right)^2 = \pi \cdot f^2(x)$$

Das Volumen der Scheibe ist dann:

$\Delta V = A \cdot h = \pi \cdot f^2(x) \cdot \Delta x$

Das Volumen des Drehkörpers kann man sich nun zusammengesetzt vorstellen aus ganz vielen solcher Scheiben. Das Gesamtvolumen ist dann die Summe aller Scheibenvolumen:

$$V = \sum_{x=a}^{b} \Delta V(x) = \sum_{x=a}^{b} \pi \cdot f^2(x) \cdot \Delta x$$

Macht man nun den Grenzwertübergang mit $\Delta\ddot{}\, x \to 0$, damit das Ergebnis genauer wird, dann erhält man ein Integral.

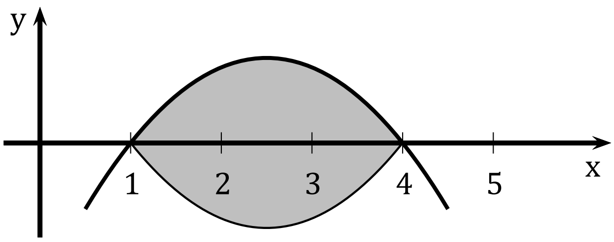
$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} \pi \cdot f^2(x) \cdot \Delta x = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx$$

Wenn man nun noch das π aus dem Integral herausnimmt, erhält man zusammengefasst die Formel fur einen Rotationskörper in den Grenzen von *a* bis *b*:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Beispiele

Eine Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ wird im Bereich zwischen den Nullstellen um die *x*Achse rotiert, wie nebenstehend dargestellt. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers!



Lösung: Zunächst müssen die Integrationsgrenzen bestimmt werden. Das sind die Nullstellen der gegebenen Funktion *f*(*x*). Dazu wird die Funktion gleich Null gesetzt.

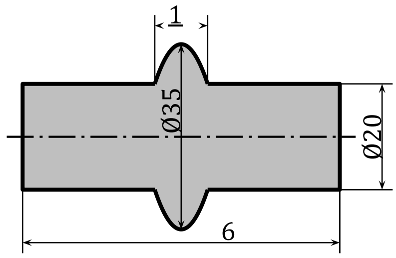
$$\begin{aligned} f(x_0 &= 0 \\ -x_0^2 + 5x_0 - 4 &= 0 \qquad\qquad | \cdot (-1) \\ x_0^2 - 5x_0 + 4 &= 0 \\ x_{01/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\ x_{01/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} = 1 & \qquad x_{02} = 4 \end{aligned}$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt, das Volumenintegral kann aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} f^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int\limits_1^4 (-x^2 + 5x - 4)^2\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int\limits_1^4 x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x^3 + 25x^2 - 20x + 4x^2 - 20x + 16\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int\limits_1^4 x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 16x\right]_1^4 \\ &= \pi \cdot \left(\left[\frac{1}{5} \cdot 4^5 - \frac{5}{2} \cdot 4^4 + 11 \cdot 4^3 - 20 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4\right] - \left[\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{2} \cdot 1^4 + 11 \cdot 1^3 - 20 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1\right]\right) \\ &= \pi \cdot (12{,}8 - 4{,}7) \\ &= \pi \cdot 8{,}1 \\ V &\approx 25{,}447 \end{aligned}$$

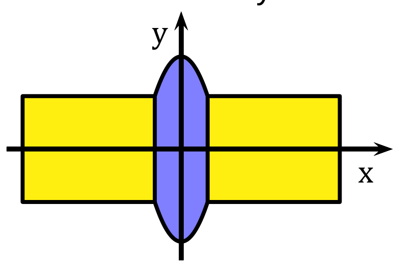
Ergebnis: Das Volumen betragt ungefähr 25,447 Volumeneinheiten.

Ein zylinderformiges Drehteil mit einer Länge von 60mm und einem Durchmesser von 20mm hat in der Mitte einen parabelförmigen Wulst, wie nebenstehend dargestellt. Der Wulst ist 10mm breit und hat einen Außendurchmesser von 35mm.



Das Drehteil soll aus Drehstahl S235JR mit der Dichte ρ = 7,85 g/cm³ gefertigt werden. Welche Masse hat das Drehteil?

Lösung: Fur die Lösung muss man zunächst ein passendes Koordinatensystem in das Drehteil legen. Dabei muss die Abszisse in die Rotationsachse gelegt werden. Wo die Ordinate hingelegt wird, ist zweitrangig, es ist aber zweckmäßig, sie in diesem Beispiel genau in die Mitte zu legen.



Der Rotationskörper kann nun in drei Teile zerlegt werden, das blau markierte Mittelteil mit der parabelförmigen Begrenzungslinie und die beiden gelb markierten zylindrischen Randstücke. Diese Randstücke können zu einem einzigen Zylinder mit 50mm Lange und 20mm Durchmesser zusammengelegt und separat auf klassische Weise berechnet werden. Fur das Mittelteil kommt die Integralformel fur Rotationskörper zum Einsatz.

Innerhalb der Rechnung wird in Millimetern gerechnet, die Einheit aber aus Vereinfachungsgründen weggelassen.
Nun ist aus den gegebenen Abmessungen die Funktionsgleichung fur die obere Parabel zu bestimmen. Wegen der symmetrischen Lage zur Ordinate lautet die allgemeine Form nicht: $f(x) = ax^2 + bx + c$ sondern: $f(x) = ax^2 + c$. Da hierbei der Parameter c den y-Achsenabschnitt darstellt, kann dieser Wert als halber Durchmesser des Wulstes übernommen werden:

$$c = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + 17{,}5$

Es muss nur noch der Parameter *a* bestimmt werden. Dazu kann man beispielsweise den rechten oberen Randpunkt des Mittelteiles verwenden: *P*(5;10). Wir setzen diese Koordinaten in die Funktionsgleichung fur¨ *x* und *y* ein:

$$\begin{aligned} f(x_P) &= y_P \\ a \cdot 5^2 + 17{,}5 &= 10 \quad | -17{,}5 \\ 25a &= -7{,}5 \quad | :25 \\ a &= -0{,}3 \end{aligned}$$

Hiermit lautet die Funkktionsgleichung: $f(x) = -0{,}3\,x^2 + 17{,}5$

Jetzt kann mit dieser Funktionsgleichung das Volumen des Mittelteils bestimmt werden.

$$\begin{aligned} V_{Wulst} &= \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(-0{,}3x^2 + 17{,}5\right)^2\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_{-5}^{5} 0{,}09x^4 - 10{,}5x^2 + 306{,}25\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \left[0{,}018x^5 - 3{,}5x^3 + 306{,}25x\right]_{-5}^{5} \\ &= \pi \cdot \Big(\big(0{,}018 \cdot 5^5 - 3{,}5 \cdot 5^3 + 306{,}25 \cdot 5\big) - \big(0{,}018 \cdot (-5)^5 - 3{,}5 \cdot (-5)^3 + 306{,}25 \cdot (-5)\big)\Big) \\ &= \pi \cdot \Big(1\,150 - (-1\,150)\Big) \\ V_{Wulst} &= 2\,300\pi \end{aligned}$$

Das Gesamtvolumen der beiden (gelb markierten) Zylinder wird berechnet:

$$V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot 10^2 \cdot 50 \ V_{Zyl} = 5000\pi$$

Das Volumen des gesamten Drehteils ist dann die Summe beider Teilvolumen.

$$\begin{aligned} V &= VZyl + VWulst \\ &= 5000\pi + 2300\pi \\ V &= 7300\pi \\ V &\approx 22994 \end{aligned}$$

Das Volumen betragt: V ≈ 22.994 mm³

Jetzt kann die gesuchte Masse berechnet werden.

$$m = \rho \cdot V$$

$$\approx 7{,}85\,\frac{g}{cm^3} \cdot 22994\,mm^3$$

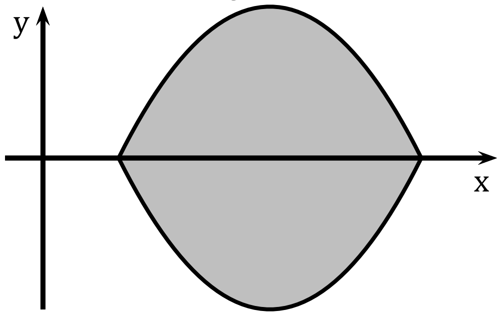
$$m \approx 180{,}029g$$

Zusammengefasst: m ≈ 180,029 g

4.2. Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der sich ergibt, wenn der Funktionsgraph der Funktion

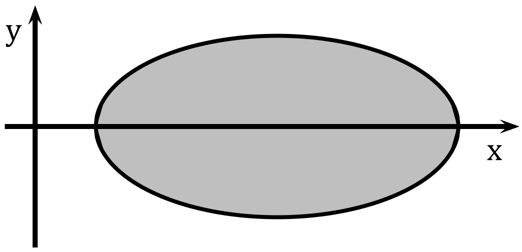


$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

um die Abszisse (x-Achse) rotiert. Die linke und rechte Begrenzung des Körpers ergibt sich durch die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Volumen des Elipsoides, der sich ergibt, wenn der Funktionsgraph der Funktion

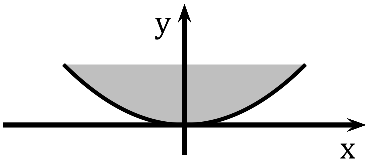


$$f(x) = \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{7}{4}}$$

um die Abszisse (x-Achse) rotiert. Die linke und rechte Begrenzung des Körpers ergibt sich durch die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)$.

Aufgabe 3

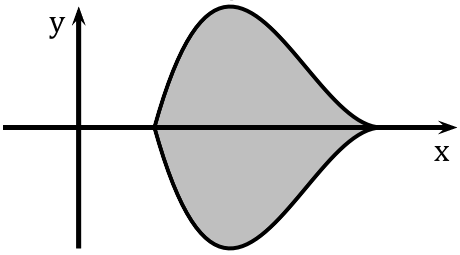
Eine Blechschüssel mit einem parabelförmigen Querschnitt hat einen Durchmesser von 40 cm. Die zugehörige Funktionsgleichung **in der Einheit Dezimeter** lautet:



$f(x) = 0{,}25x^2$

Wieviele Liter Wasser können darin eingefüllt werden?

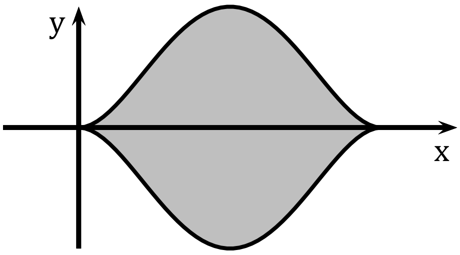
Aufgabe 4
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der sich ergibt, wenn der Funktionsgraph der Funktion



$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

um die Abszisse (x-Achse) rotiert. Die linke und rechte Begrenzung des Körpers ergibt sich durch die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)$.

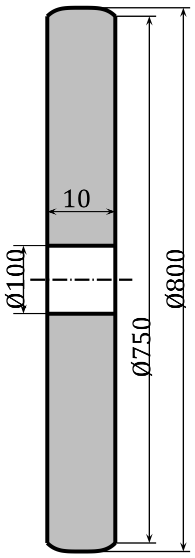
Aufgabe 5
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der sich ergibt, wenn der Funktionsgraph der Funktion
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$



um die Abszisse (x-Achse) rotiert. Die linke und rechte Begrenzung des Körpers ergibt sich durch die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)$.

Aufgabe 6

Eine Riemenscheibe soll fur den Flachriemenantrieb eines mechanischen Hammers im Schmiedemuseum angefertigt werden. Die Riemenscheibe hat eine Dicke von 100mm. Der Außendurchmesser beträgt 800mm. In der Mitte hat sie eine Bohrung mit einem Durchmesser von 100mm. Hier wird sie auf die Antriebswelle des Hammers aufgesetzt. Die Riemenscheibe soll aus Gusseisen mit einer Dichte von ρ = 7,2 g/cm³ gefertigt werden.



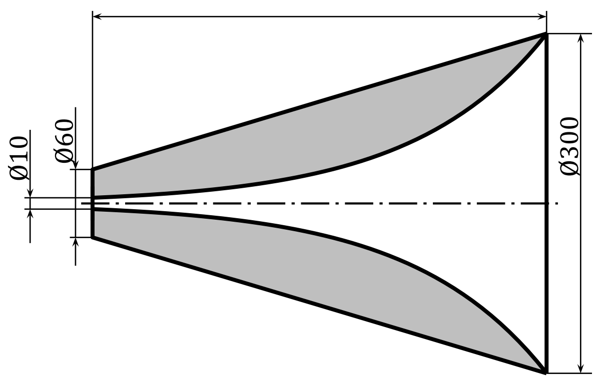
Bekanntlich muss eine Riemenscheibe fur Flachriemen am Außendurchmesser eine ballige Kontur aufweisen, damit der Riemen nicht abspringt. Der Durchmesser am Rand dieser Kontur beträgt 750mm. Die Kontur wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(x) = ax^4 + b$$

Diese Funktion gilt für den Fall, dass das Koordinatensystem mit der Abszisse (x-Achse) auf die Rotationsachse und die Ordinate (y-Achse) mittig in die Riemenscheibe gelegt wird. Die Einheit ist dabei Millimeter.
Welche Masse hat die Riemenscheibe?

Aufgabe 7

Für den Anschluss einer Goubeau-Leitung wird ein Trichter mit einer exponentiellen Innenform benötigt. Dieser Trichter mit einer Länge von 400mm soll aus Messing hergestellt werden. Die Außenkontur des Trichters ist ein Pyramidenstumpf mit 60mm Durchmesser am linken und 300mm Durchmesser am rechten Rand. Die verwendete Messinglegierung CuZn5 hat eine Dichte von ρ = 8,86 g/cm³.



Der Trichter beginnt links mit einem Innendurchmesser von10mm und endet rechts mit gleichem Innen- und Außendurchmesser.

Legt man das Koordinatensystem mit der Abszisse auf die Rotationsachse und die Ordinate auf die linke Randfläche, dann hat die Funktionsgleichung für die Innenkontur diese Form:

$f(x) = a \cdot e^{bx}$

Bestimmen Sie die Masse des fertigen Goubeau-Exponentialtrichters!

5. Lösungen der Übungsaufgaben

5.1. Lösungen zu 3.2.

a) $\int 3 \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = 3 \cdot \sin x + c$

b) $\int e \cdot ex \, \mathrm{d}x = e \cdot ex + c$

c) $\int \pi \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -\pi \cdot \cos x + c$

d) $$\int \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + e^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + e^2 x + c$$

e) $\int 15\mathrm{d}x = 15x + c$

f) $\int 8x3 \, \mathrm{d}x = 2x4 + c$

g) $\int 6x2 + 4x - 3\mathrm{d}x = 2x3 + 2x2 - 3x + c$

h) $$\int 2x^2 - 6x - 12 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 12x + c$$

i) $$\int \frac{3}{x^3} \, \mathrm{d}x = \int 3x^{-3} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{-2}x^{-2} + c = -\frac{3}{2x^2} + c$$

j) $$\int \frac{5}{x} \, \mathrm{d}x = 5 \ln |x| + c$$

k) $$\int \frac{3x^2}{8x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{3x}{8} \, \mathrm{d}x = \frac{3x^2}{16} + c$$

l) $$\int \frac{3x+1}{2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} + c$$

m) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

n) $\int \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + c$

o) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 8 \cdot x^{\frac{1}{2}} + c = 8 \cdot \sqrt{x} + c$

5.2. Lösungen zu Aufgabe 1

a)

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 0{,}5(x - 2)^2 + 3{,}5$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x + 3$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$f_1(x_s) \quad =$

$0{,}5(x_s - 2)^2 + 3{,}5 \quad =$

$0{,}5(x^2_s - 4x_s + 4) + 3{,}5 \quad = \quad f_2(x_s)$

$x_s + 3$

$0{,}5x^2_s - 2x_s + 2 + 3{,}5 \quad = \quad x_s + 3$

$x_s + 3 \quad | - x_s - 3$

$0{,}5x^2_s - 3x_s + 2{,}5 \qquad | \cdot 2$

$= \quad 0 \; x^2_s$

$\pm\sqrt{9-5}$

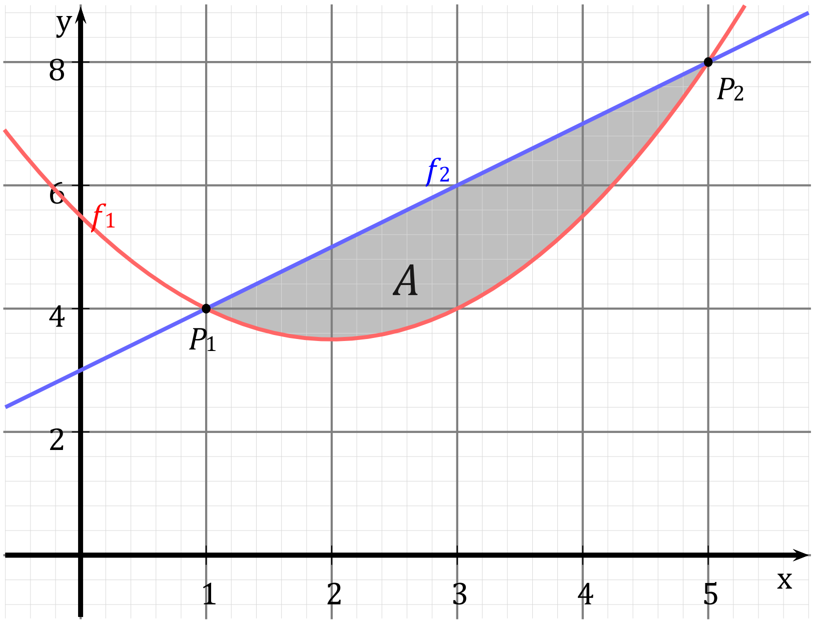
$- 6x_s + 5 \quad = \quad \pm 2$

$0 \; x_{s1/2} = \quad x_2 = 5$

$3 \; x_{s1/2} = \quad 3$

$x_1 = 1$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.



Ein Blick auf die Skizze zeigt, dass im Bereich zwischen 1 und 5 f_2 die obere und f_1 die untere Funktion ist. Damit können wir die gesuchte Fläche als bestimmtes Integral ansetzen.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^5 (x+3) - \left(0,5(x-2)^2 + 3,5\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^5 x + 3 - \left(0,5x^2 - 2x + 2 + 3,5\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^5 x + 3 - 0,5x^2 + 2x - 5,5\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^5 -0,5x^2 + 3x - 2,5\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2,5x\right]_1^5 \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right]_1^5 \\
&= \left[-\frac{1}{6}\cdot 5^3 + \frac{3}{2}\cdot 5^2 - \frac{5}{2}\cdot 5\right] - \left[-\frac{1}{6}\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{5}{2}\cdot 1\right] \\
&= \frac{25}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{32}{6} \approx 5,333 \\
A &= \frac{16}{3}\ \text{FE}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Flache beträgt ca. 5,333 Fläacheneinheiten.

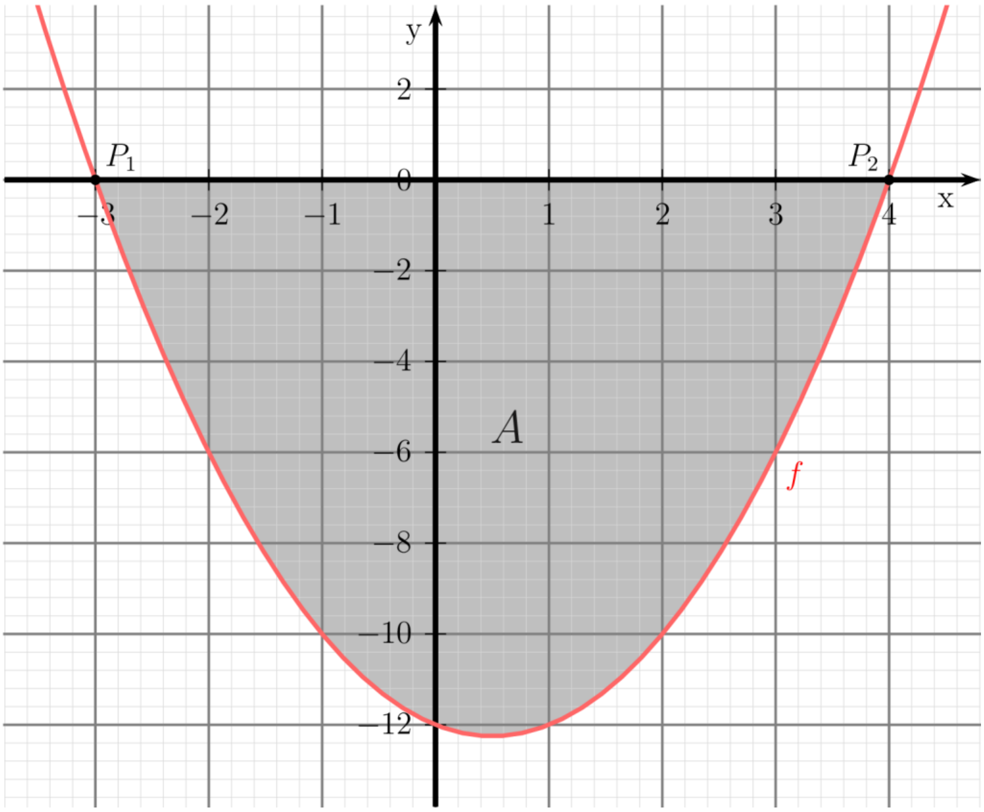
b)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - x - 12$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der x-Achse berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
x_0^2 - x_0 - 12 &= 0 \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_{01} = -3 &\quad x_{02} = 4
\end{aligned}
$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.



Der Formfaktor *a* = +1 ist positiv, die Parabel ist also nach oben geöffnet. Deshalb muss die Fläche *unterhalb* der *x*-Achse liegen. Daher ergibt der Ansatz mit dem bestimmten Integral einen *negativen* Wert. Wir müssen daher beim Ansatz ein Minuszeichen einfügen.

$$
\begin{aligned}
A &= -\int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-3}^{4} x^2 - x - 12\ \mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x\right]_{-3}^{4} \\
&= -\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 12\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3)\right)\right] \\
&= -\left(-\frac{104}{3} - \frac{45}{2}\right) \\
&= \frac{343}{6} \approx 57,167 \\
A &= \frac{343}{6}\ \text{FE}
\end{aligned}
$$

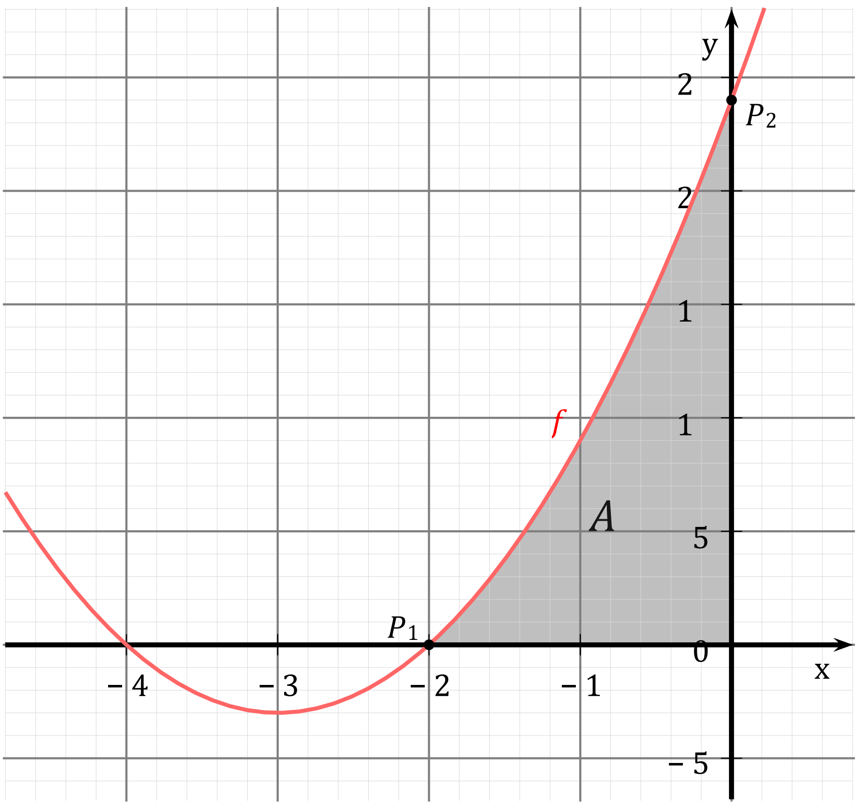
Die gesuchte Fläche beträgt ca. 57,167 Flächeneinheiten c)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse und der y-Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der x-Achse berechnet werden.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
3x_0^2 + 18x_0 + 24 &= 0 \quad | : 3 \\
x_0^2 + 6x_0 + 8 &= 0 \\
x_{01/2} &= -3 \pm \sqrt{9-8} \\
x_{01/2} &= -3 \pm 1 \\
x_{01} = -4 & \qquad x_{02} = -2
\end{aligned}$$

Damit sind die möglichen Integrationsgrenzen bekannt. Ein Blick auf den Funktionsgraphen zeigt, dass der rechte Schnittpunkt mit der x-Achse $x_1 = -2$ als untere Integrationsgrenze verwendet werden muss. Die obere Grenze ist die y-Achse, also $x_2 = 0$. Die linke Nullstelle bei $x_{01} = -4$ liegt zu weit ab.



Die Fläche liegt *oberhalb* der x-Achse. Daher ergibt das bestimmte Integral einen *positiven* Wert, es muss also kein Minuszeichen eingefügt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} 3x^2 + 18x + 24\ \mathrm{d}x \\
&= \left[x^3 + 9x^2 + 24x\right]_{-2}^{0} \\
&= \left(0^3 + 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0\right) - \left((-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2)\right) \\
&= 0 - (-20) \\
A &= 20\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Die gesuchte Fläche beträgt 20 Flächeneinheiten.}}$

d)

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktberechnung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$f_1(x_s) = f_2(x_s)$$

$x3s - 4x2s + 5xs - 3$ $x3s - 6x2s + 9xs - 4$	= =	$3 = 2x_s^2 - 4x_2 + 1 \mid -2x_s^2 + 4x_2 - 1$ $4 = 0$

Ein analytisches Lösungsverfahren für kubische Gleichungen haben wir nicht zur Verfügung. Wir können jedoch durch *planvolles* Probieren eine Lösung bestimmen und dann den Funktionsterm faktorisieren. Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt, dann sind das Teiler des absoluten Gliedes. Es kommt also nur ±1, ±2 und ±4 in Frage.

Wir finden schnell die Lösung $x_{s1} = 1$. Mit Hilfe der Polynomdivision können wir $(x_s - 1)$ ausklammern.

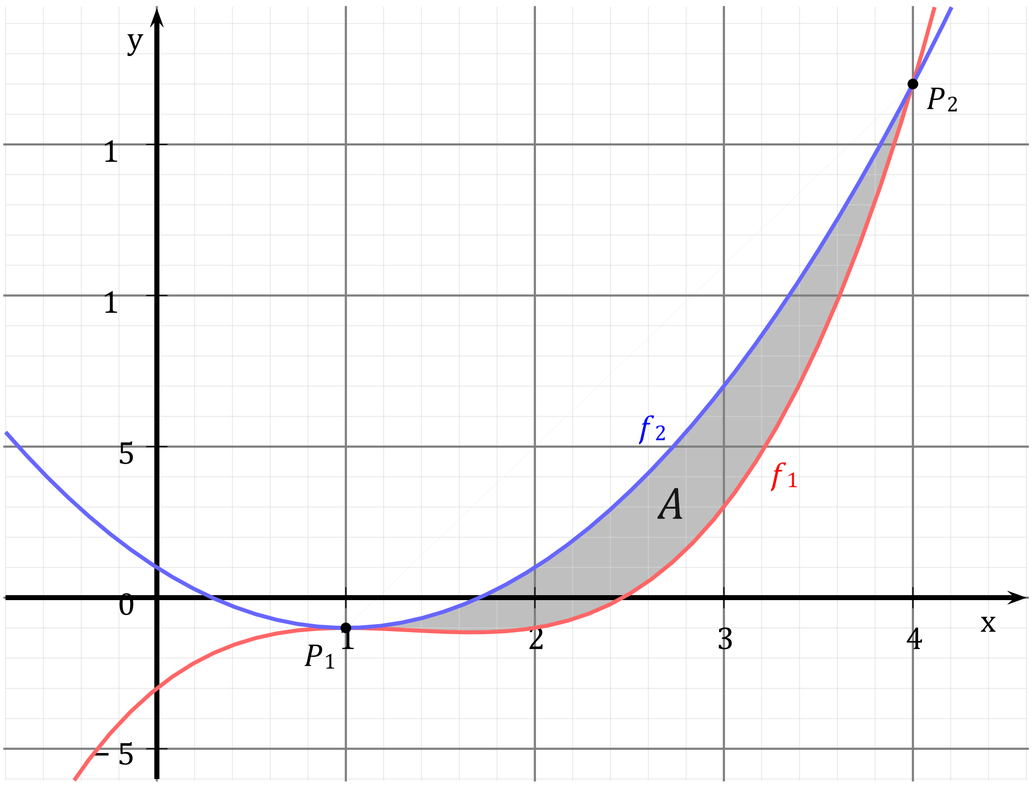
$$x_s^3 - 6x_s^2 + 9x_s - 4 = \left(x_s^2 - 5x_s + 4\right) \cdot (x_s - 1)$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wir müssen also für weitere Nullstellen nur noch den ersten Term untersuchen.

$$
\begin{aligned}
x_s^2 - 5x_s + 4 &= 0 \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_{s2} = 1 \qquad & x_{s3} = 4
\end{aligned}
$$

Bei $x = 1$ liegt eine doppelte Nullstelle vor, wir haben also tatsächlich nur zwei gemeinsame Punkte der beiden Funktionsgraphen. Damit sind die Integrationsgrenzen als $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ bekannt.

Werfen wir einen Blick auf die Funktionsgraphen, dann können wir sehen, dass in diesem Bereich der Graph der Funktion f_2 oberhalb des Graphen der Funktion f_1 liegt. Damit können wir das bestimmte Integral zur Flächenberechnung mit $f_2(x) - f_1(x)$ ansetzen.



Flächenberechnung:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(2x^2 - 4x + 1\right) - \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 2x^2 - 4x + 1 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 -x^3 + 6x^2 - 9x + 4\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4 + 2\cdot 4^3 - \frac{9}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3 - \frac{9}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right) \\
&= 8 - 1{,}25 \\
A &= 6{,}75\text{FE}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt 6,75 Flächeneinheiten.

e)

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^4 - 4x^1 + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = -x^2 + 7$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktbestimmung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ x^4 - 4x^2 + 3 &= -x^2 + 7 \quad | + x^2 - 7 \\ x4 - 3x2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Diese **biquadratische Gleichung** löst man durch Substitution. Wir ersetzen vorübergehend: $x^2 = z$

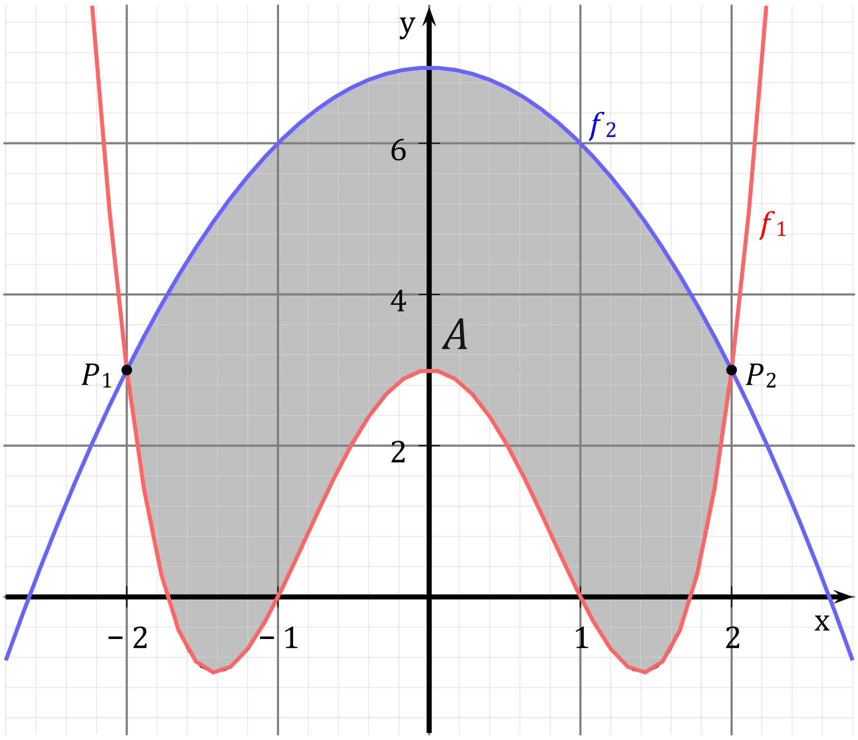
Dadurch erhalten wir eine quadratische Gleichung mit z.

$$\begin{aligned} z^2 - 3z - 4 &= 0 \\ z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\ z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ z_1 = \frac{8}{2} = 4 & \qquad z_2 = -\frac{2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Beim Zurück-Substituieren entfällt die Lösung für $z_2 = -1$, da die Quadratzahl einer reellen Zahl nicht negativ sein kann. Führen wir das also für z_1 durch.

$$\begin{aligned} x^2 &= z_1 \\ x^2 &= 4 \quad |\sqrt{\ } \\ x_{1/2} &= \pm 2 \\ x_1 = -2 & \qquad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Werten liegt also die zu bestimmende Fläche.



Flächenberechnung: Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von f_1 und **oben** von f_2 begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

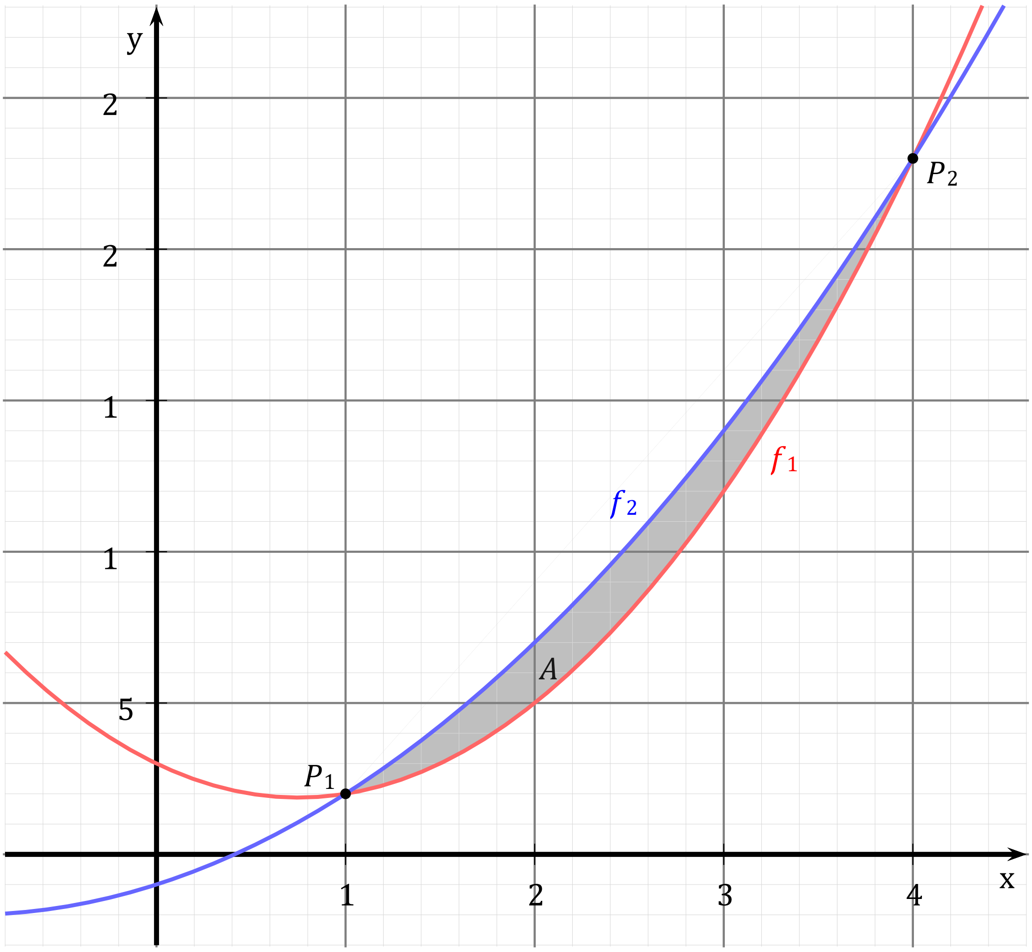
$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-x^2+7\right) - \left(x^4-4x^2+3\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} -x^2+7-x^4+4x^2-3\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} -x^4+3x^2+4\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{5}x^5+x^3+4x\right]_{-2}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{5}\cdot 2^5+2^3+4\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{5}\cdot(-2)^5+(-2)^3+4\cdot(-2)\right) \\
&= (-6,4+8+8)-(6,4-8-8) \\
A &= 19{,}2\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Die Fläche beträgt *A* = 19,2 Flächeneinheiten f)

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktbestimmung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
2x^2 - 3x + 3 &= x^2 + 2x - 1 \quad |-x^2 - 2x + 1 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 = 1 & \quad x_2 = 4
\end{aligned}$$



Flächenberechnung: Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von f_1 und **oben** von f_2 begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(x^2 + 2x - 1\right) - \left(2x^2 - 3x + 3\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 3x - 3\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 -x^2 + 5x - 4\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cdot 4^3 + \frac{5}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{5}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1\right) \\
&= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) \\
&= \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) \\
A &= 4{,}5\text{FE}
\end{aligned}$$

Die Flache beträgt A = 4,5 Flacheneinheiten

g)

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verlauft außerdem noch durch den Punkt $P(2|240)$. Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Aufstellen der Funktionsgleichung: Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f\,'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d
\end{aligned}$$

Punkt (0|0)	$\Rightarrow f(0) = 0$	$\Rightarrow$ (1)$0a + 0b + 0c + 0d + e$	0
Punkt (4|0)	$\Rightarrow f0(4) = 0$	$\Rightarrow$ (2) $256a + 64b + 16c + 4d + e$	0
Tiefpunkt bei $x_1 = 0$	$\Rightarrow f0(0) = 0$	$\Rightarrow$ (3) $0a + 0b + 0c + d$	
Tiefpunkt bei $x_2 = 4$	$\Rightarrow f\ (4) = 0$	$\Rightarrow$ (4)$256a + 48b + 8c + d$	0
Punkt (2|240	$\Rightarrow f(2) = 240$	$\Rightarrow$ (5)$16a + 8b + 4c + 2d + e$	0

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort: 240

$$\begin{array}{lccc} (1) & e & = & 0 \\ (3) & d & = & 0 \end{array}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (2) & 256a & +64b & +16c & = & 0 \\ (4) & 256a & +48b & +8c & = & 0 \\ (5) & 16a & +8b & +4c & = & 240 \end{array}}$$

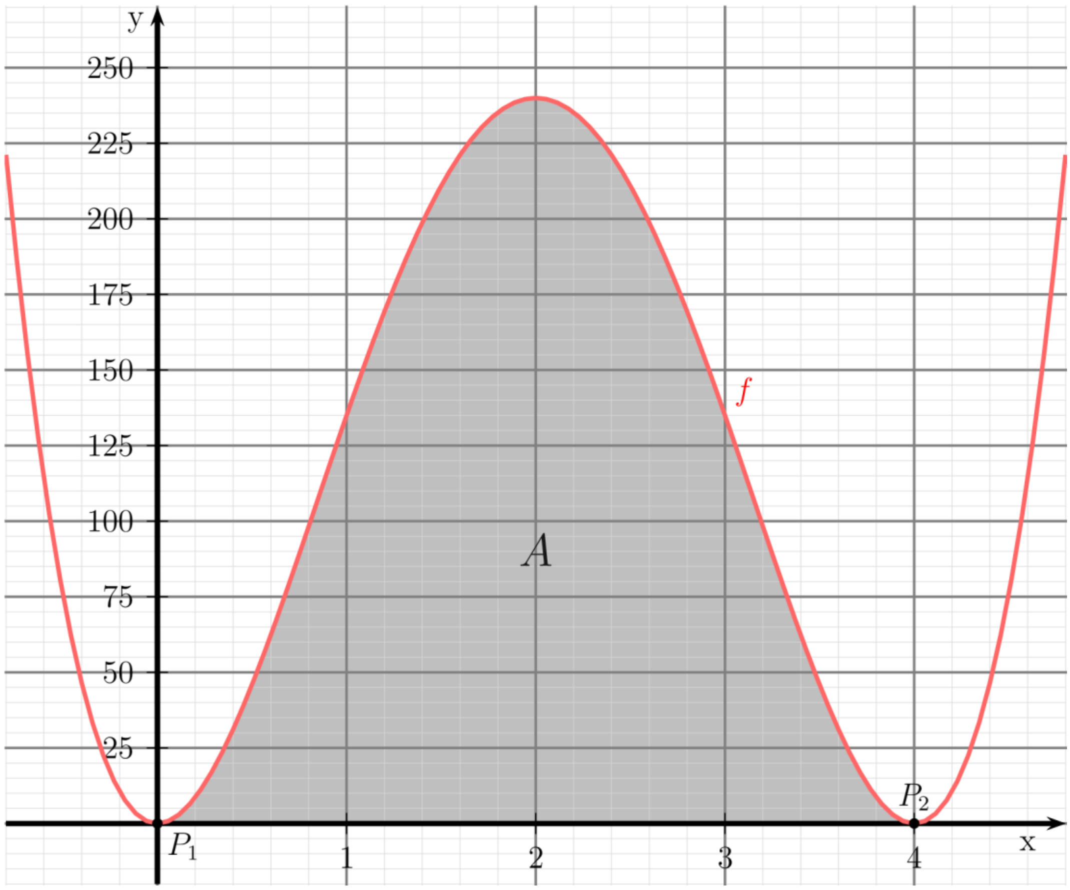
Mit einem beliebigen Lösungsverfahren erhält man:

a = 1

b = – 12

c = 24

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 15x^4 – 12x^3 + 240x^2$



Flächenberechnung: Die Integrationsgrenzen 0 und 4 sind bereits durch die *x*-Koordinaten der Tiefpunkte bekannt. Daher kann die Fläche direkt angesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{4} 15x^4 - 120x^3 + 240x^2\ \mathrm{d}x \\
&= \left[3x^5 - 30x^4 + 80x^3\right]_0^4 \\
&= \left(3 \cdot 4^5 - 30 \cdot 4^4 + 80 \cdot 4^3\right) - \left(3 \cdot 0^5 - 30 \cdot 0^4 + 80 \cdot 0^3\right) \\
&= (3072 - 7680 + 5120) - 0 \\
A &= 512
\end{aligned}
$$

$\boxed{A\text{=512 Flacheneinheiten}}$

h)

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(0|4)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2|0)$. Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven x-Achse, der y-Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

Aufstellen der Funktionsgleichung: Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Punkt (0/4)	$\Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow (1)$	$0a + 0b + 0c + d = 4$
Punkt (2/0)	$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (2)$	$8a + 4b + 2c + d = 0$
Hochpunkt bei $x_H = 0$	$\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow (3)$	$0a + 0b + c = 0$
Tiefpunkt bei $x_T = 2$	$\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow (4)$	$12a + 4b + c = 0$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$(1) \quad d = 4$$
$$(3) \quad c = 0$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2) und (4) ein, erhält man ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung, das ich anschließend mit einem beliebigen Verfahren, beispielsweise mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren lösen kann:

$$\begin{array}{rrrcrl} (2) & 8a & +4b & = & -4 & | \\ (4) & 12a & +4b & = & 0 & |- \\ \hline (2)-(4) & -4a & & = & -4 & | : (-4) \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (4) ein:

$$12 \cdot 1 + 4b = 0 \quad | -12$$
$$4b = -12 \mid : 4 \; b$$
$$= -3$$

Die gesuchte Funktion lautet:$f(x) = x^3 – 3x^2 + 4$

Nullstellenberechnung:

$$f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$$

Durch **planvolles** Probieren erhalte ich die Lösung:

$x_{01} = 2$

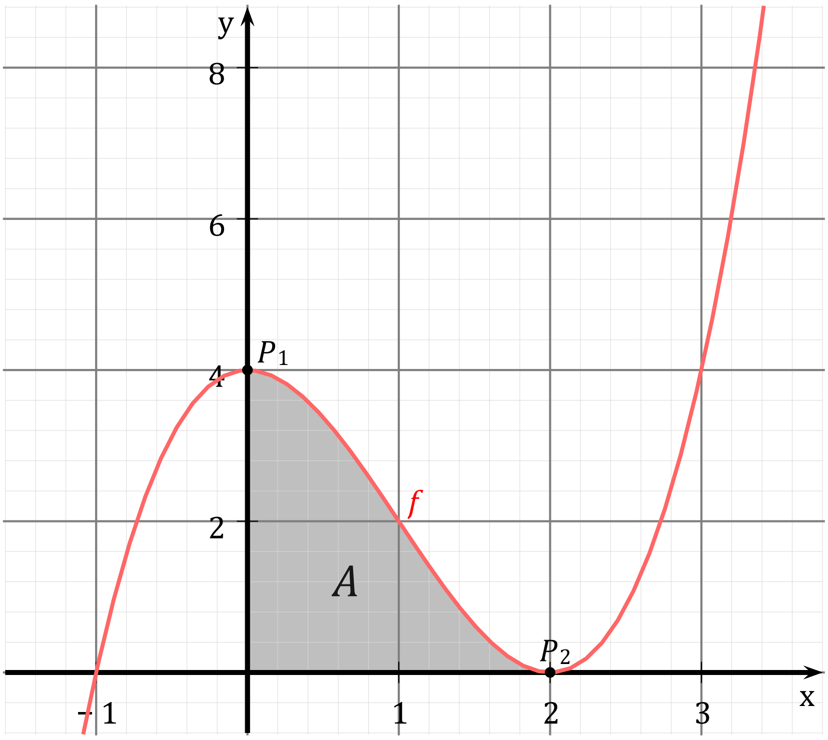
Weitere Nullstellen finde ich, nachdem der Funktionsterm mit Hilfe einer **Polynomdivision** faktorisiert wurde. Man kann immer $(x - x_0)$ ausklammern, hier also $(x - 2)$.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -3x^2 & & +4) & : \quad (x-2) \quad = \quad x^2 - x - 2 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
& -x^2 & & +4 & \\
- & (-x^2 & +2x) & & \\
\hline
& & -2x & +4 & \\
& - & (-2x & +4) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

Weitere Nullstellen finden wir als Nullstellen des Ergebnisterms.

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_2 = -1 & \qquad x_3 = 2
\end{aligned}$$

$x_3 = 2$ ist identisch mit $x_1 = 2$, wir haben tatsachlich also nur **zwei** Nullstellen. Da die **positive** x-Achse eine Begrenzungslinie ist, kommt nur $x_1 = 2$ als Flachenbegrenzungspunkt in Frage, wie auch die Skizze erkennen lässt.



Fläachenberechnung: Die Fläche stellt sich demnach als Integral unter der Kurve von 0 bis 2 dar.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^3 - 3x^2 + 4\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 0^3 + 4\cdot 0\right) \\
&= (4 - 8 + 8) - 0 \\
A &= 4\,\mathrm{FE}
\end{aligned}
$$

A=4 Flacheneinheiten

i)
Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verläuft durch die Punkte $P_1(1|-15)$, $P_2(4|12)$ und $P_3(5|9)$. Berechnen Sie die Fläche, welche die x-Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

Aufstellen der Funktionsgleichung: Die allgemeine Form fur ein Polynom 2. Grades lautet:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Die drei gegebenen Punkte ergeben drei Bedingungen, aus denen ein Lineargleichungssystem erstellt werden kann.

(1)	$f(1)$	=	$-15 \Rightarrow a + b + c$		$= -15$	
(2)	$f(4)$	=	12	$\Rightarrow 16a + 4b + c$	=	12
(3)	$f(5)$	=	9	$\Rightarrow 25a + 5b + c$	=	9

Zusammengefasst sieht unser Lineargleichungssystem also so aus:

(1)	a	$+b$	$+c$	=	-15
(2)	$16a$	$+4b$	$+c$	=	12
(3)	$25a$	$+5b$	$+c$	=	9

Zur Lösung kann nun jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. Da der Parameter c in jeder Gleichung allein vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen paarweise voneinander zu subtrahieren, damit wir zwei Gleichungen **ohne** c erhalten.

(4)=(2)	− (1)	1 a	+3 b	=	2
(5)=(3)	− (1)	2 a	+4 b	=	2

Fur den nächsten Schritt verwende ich willkürlich das **Einsetzungsverfahren**. Ich löse Gleichung (4) nach b auf und setze den Term in (5) ein.

(4) $\quad 15a + 3b = 27 \quad | -15a$

$3b = 27 - 15a \mid : 3 \; b$
$= 9 - 5a$

Eingesetzt in (5):

a

$$\begin{aligned} 24a + 4b &= 24 \\ 24a + 4 \cdot (9 - 5a) &= 24 \\ 24a + 36 - 20a &= 24 \quad | - 36 \\ 4a &= -12 \,|\, : 4 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt.

$b = 9 - 5a = 9 - 5 \cdot (-3) = 24$

Nun werden beide Ergebnisse in (1) eingesetzt. (Auch jede andere Gleichung wäre hier möglich.)

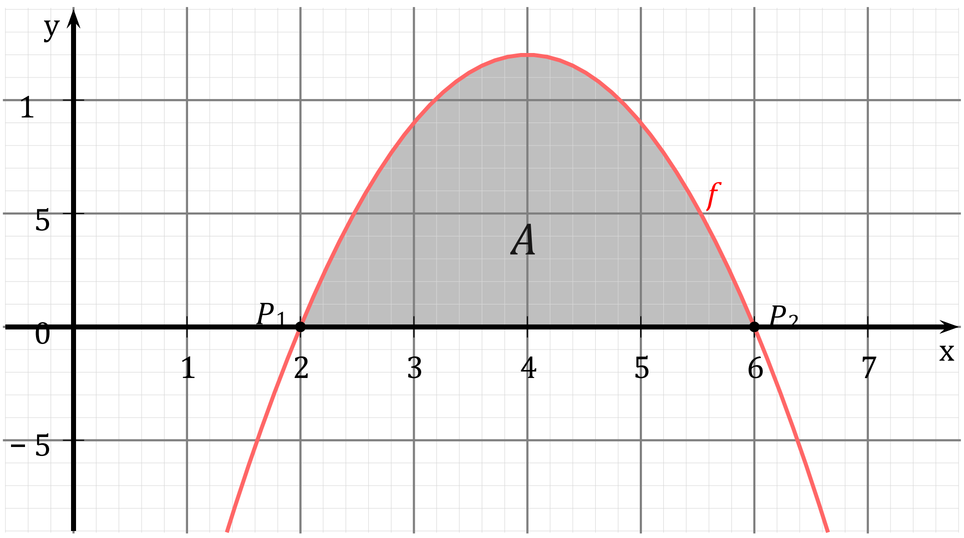
$$\begin{aligned} (1) \qquad a + b + c &= -15 \\ -3 + 24 + c &= -15 \\ 21 + c &= -15 \quad | - 21 \\ c &= -36 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -3x^2 + 24x - 36}$

Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -3x_0^2 + 24x_0 - 36 &= 0 \qquad\qquad | : (-3) \\ x_0^3 - 8x_0 + 12 &= 0 \\ x_{01/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ x_{01/2} &= 4 \pm 2 \\ x_{01} = 2 & \qquad x_{02} = 6 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



Berechnung der Fläche: Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flächenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{2}^{6} -3x^2 + 24x - 36\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-x^3 + 12x^2 - 36x\Big]_2^6 \\
&= \left(-6^3 + 12\cdot 6^2 - 36\cdot 6\right) - \left(-2^3 + 12\cdot 2^2 - 36\cdot 2\right) \\
&= 0 - (-32) \\
A &= 32\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 32\mathrm{FE}}$

j)

Ein Polynom 3. Grades $f(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x_w = 3$ mit der Wendetangente $f_1(x) = -6x + 22$. Die y-Achse schneidet der Graph des Polynoms bei $y_0 = -32$. Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$.

Aufstellen der Funktionsgleichung: Benötigt wird die Grundfunktion sowie die ersten beiden Ableitungen des Polynoms.

$f(x)$	=	$ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f''(x)$	=	$3ax^2 + 2bx + c$
$f''''(x)$	=	$6ax + 2b$

Aus dem Wendepunkt bei $x_w = 3$ erhält man:

$$(1)\ f''''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0$$

Die Wendetangente liefert gleich zwei Bedingungen – den y-Wert am Wendepunkt und die Steigung dort. Diese Werte bestimme ich vorab.

$$f_1(3) = -6 \cdot 3 + 22 = 4$$
$$f_1'(3) = m = -6$$

Mit diesen Werten können nun die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{array}{llcccrcl}
(2) & f(3) & = & f_1(3) & \Rightarrow & a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d & = & 4 \\
(3) & f'(3) & = & f_1'(3) & \Rightarrow & 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c & = & -6
\end{array}$$

Die letzte Bedingung liefert der y-Achsenabschnitt.

$$(4)\quad f(0) \quad = \quad -32 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \quad = -32$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man folgendes Gleichungssystem 4. Ordnung:

(1)	$18a$	$+2b$			=	0
(2)	$27a$	$+9b$	$+3c$	$+d$	=	4
(3)	$27a$	$+6b$	$+c$		=	-6
(4)	d				=	-32

Aus Gleichung (4) ist d schon bekannt. Der Wert wird sofort in (2) eingesetzt. Bringt man in Gleichung (2) den eingesetzten Wert von −32 sofort auf die andere Gleichungsseite, erhält man folgendes Gleichungssystem 3. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} (1) & 18a & +2b & & = 0 \\ (2) & 27a & +9b & +3c & = 36 \\ (3) & 27a & +6b & +c & = -6 \end{array}}$$

Für die weitere Lösung ist es günstig, dass *c* nur in **zwei** Gleichungen vorkommt. Man sollte also versuchen, die Variable *c* zuerst zu eliminieren. Dies könnte mit dem Einsetzungsverfahren, aber auch mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren durchgeführt werden. Ich entscheide mich fur letzteres und dividiere dazu Gleichung (2) durch 3. Dann¨ kann (2) von (3) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrrrcrl} (2) & 27a & +9b & +3c & = & 36 & \mid :3 \\ (3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & \\ \hline (2) & 9a & +3b & +c & = & 12 & \mid - \\ (3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & \mid \\ \hline (5) & 18a & +3b & & = & -18 & \end{array}$$

Mit Gleichung (1) und (5) bleibt nun ein Gleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & 18a & +2b & = 0 \\ (5) & 18a & +3b & = -18 \end{array}}$$

Hier bietet sich sofort das Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von *a* gleich sind.

$$\begin{array}{lrrcrl} (1) & 18a & +2b & = & 0 & \mid - \\ (5) & 18a & +3b & = & -18 & \mid \\ \hline (6) & & b & = & -18 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$(1) \qquad 18a + 2b = 0$$

$$\begin{aligned} 18a + 2b &= 0 \\ 18a + 2 \cdot (-18) &= 0 \\ 18a - 36 &= 0 \quad \mid +36 \\ 18a &= 36 \quad \mid :18 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von *c* verwende ich die umgestellte Gleichung (2).

$$(2) \qquad 9a + 3b + c = 12$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-18) + c &= 12 \\ 18 - 54 + c &= 12 \\ -36 + c & \\ c &= 12 \ | + \\ &= 48 \quad 36 \end{aligned}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung $\boxed{f(x) = 2x}^3 - \boxed{18x}^2 \boxed{+ 48x + 32}$

Nullstellenbestimmung:

$f(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} 2x_0^3 - 18x_0^2 + 48x_0 - 32 &= 0 = 0 \ | : 2 \\ x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16 &= 0 = 0 \end{aligned}$$

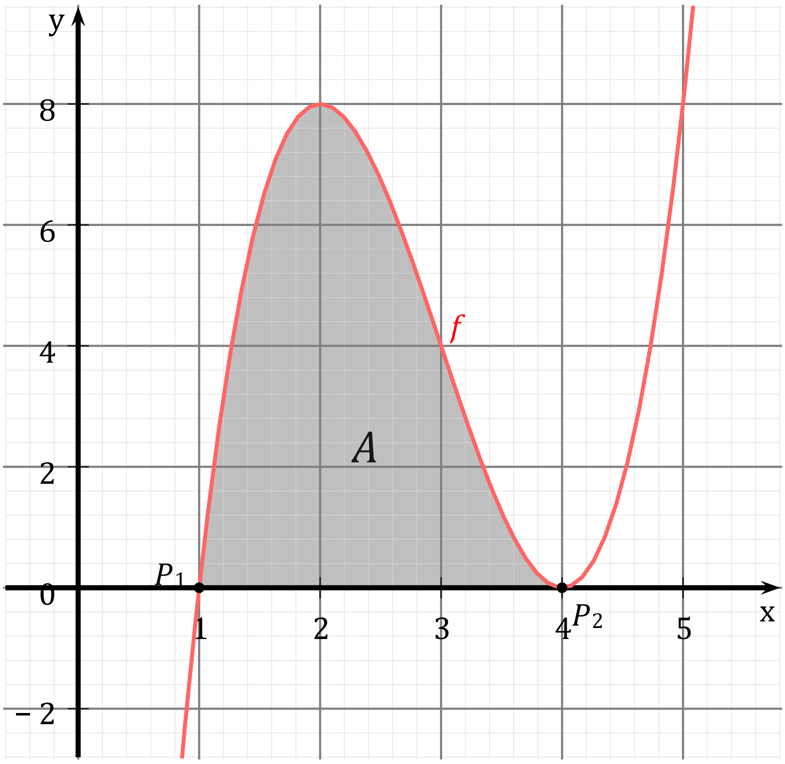
Da wir kein analytisches Lösungsverfahren für eine kubische Gleichung haben, muss eine Lösung durch planvolles Raten ermittelt werden. Man erhält so z. B. x_{01} = 1. Damit ist eine **Polynomdivision** möglich.

$$\begin{array}{rrrrl} (x_0^3 & -9x_0^2 & +24x_0 & -16) & : (x_0 - 1) = x_0^2 - 10x_0 + 16 \\ -(x_0^3 & -x_0^2) & & & \\ \hline & -8x_0^2 & +24x_0 & -16) & \\ - & (-8x_0^2 & +8x_0) & & \\ \hline & & 16x_0 & -16 & \\ & - & (16x_0 & -16) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Alle weiteren Nullstellen liegen jetzt in dem Ergebnisterm.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\ x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\ &= 4 \pm 0 \\ x_{02} &= 4 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



Berechnung der Fläche: Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flachenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{1}^{4} 2x^3 - 18x^2 + 48x - 32\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 32x\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^4 - 6\cdot 4^3 + 24\cdot 4^2 - 32\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^4 - 6\cdot 1^3 + 24\cdot 1^2 - 32\cdot 1\right) \\
&= 0 - (-13{,}5) \\
A &= 13{,}5 \text{ FE}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 13{,}5\text{FE}}$

5.3. Lösungen zu 4.2.

Zunachst müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt werden,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -x_0^2 + 6x_0 - 5 &= 0 \qquad\qquad | \cdot (-1) \\ x_0^2 - 6x_0 + 5 &= 0 \\ x_{01/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\ x_{01/2} &= 3 \pm 2 \\ x_{01} = 1 & \qquad x_{02} = 5 \end{aligned}$$

Hiermit sind die Integrationsgrenzen bekannt, das Volumenintegral kann aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right)^2\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_1^5 x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x^3 + 36x^2 - 30x + 5x^2 - 30x + 25\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_1^5 x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25\ \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{46}{3}x^3 - 30x^2 + 25x\right]_1^5 \\ &= \pi \cdot \left(\left[\frac{1}{5} \cdot 5^5 - 3 \cdot 5^4 + \frac{46}{3} \cdot 5^3 - 30 \cdot 5^2 + 25 \cdot 5\right] - \left[\frac{1}{5} \cdot 1^5 - 3 \cdot 1^4 + \frac{46}{3} \cdot 1^3 - 30 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1\right]\right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{625}{15} - \frac{113}{15}\right) \\ &= \pi \cdot \frac{512}{15} \\ V &\approx 107{,}233 \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt: V ≈ 107,233 VE

Aufgabe 2

Zunachst müssen die Nullstellen bestimmt werden. Diese stellen die Integrationsgrenzen dar.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
\sqrt{-\frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 - \frac{7}{4}} &= 0 && |(\ )^2 \\
-\frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 - \frac{7}{4} &= 0 && |\cdot(-4) \\
x_0^2 - 8x_0 + 7 &= 0 \\
x_{01/2} &= 4 \pm \sqrt{16-7} \\
x_{01/2} &= 4 \pm 3 \\
x_{01} = 1 & \quad x_{02} = 7
\end{aligned}
$$

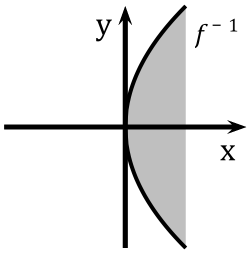
Hiermit kann das Volumen über die Integralformel bestimmt werden.¨

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_1^7 \left(\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{7}{4}}\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_1^7 -\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{7}{4}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[-\frac{1}{12}\cdot x^3 + x^2 - \frac{7}{4}\cdot x\right]_1^7 \\
&= \pi \cdot \left(\left[-\frac{1}{12}\cdot 7^3 + 7^2 - \frac{7}{4}\cdot 7\right] - \left[-\frac{1}{12}\cdot 1^3 + 1^2 - \frac{7}{4}\cdot 1\right]\right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{98}{12} - \left(-\frac{10}{12}\right)\right) \\
&= \pi \cdot \frac{108}{12} \\
&= \pi \cdot 9 \\
V &\approx 28{,}274
\end{aligned}
$$

Das Volumen beträgt: V ≈ $28{,}274\ VE$

Aufgabe 3

Die parabelförmige Schüssel hat für die Anwendung der Integralformel nicht die richtige Lage. In der angegebenen Form erfolgt die Rotation um die Ordinate (*y*-Achse). Die Integralformel verlangt jedoch eine Rotation um die Abszisse (*x*-Achse). Eine Spiegelung an der 45°-Achse im ersten Quadranten muss durchgeführt werden. Dies geschieht durch Bilden der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.



Mit der Umkehrfunktion erhalten wir den nebenstehend dargestellten Verlauf des Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned} 0{,}25y^2 &= x && | \cdot 4 \\ y^2 &= 4x && |\sqrt{\ } \\ y &= \pm\sqrt{4x} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{4x} \end{aligned}$$

Beim Ziehen der Wurzel kommt die positive und die negative Wurzel in Betracht. Da eine Funktion aber **rechtseindeutig** sein muss (ein eindeutiges Ergebnis liefern muss), entfällt für die Umkehrfunktion das Minuszeichen.

Die Integrationsgrenzen werden benötigt. Die untere mit a = 0 ist bekannt, die obere kann mit Hilfe des Schüsseldurchmessers bestimmt werden. Bei einem Schüsseldurchmesser von *d* = 40cm = 4dm beträgt der Schüsselradius 2dm. Dies ist der Funktionswert an der oberen Integrationsgrenze *b*.

$$\begin{aligned} f^{-1}(b) &= 2 \\ \sqrt{4 \cdot b} &= 2 && |(\ )^2 \\ 4 \cdot b &= 4 && |:4 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Hiermit kann nun das Volumenintergal aufgestellt werden.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_a^b \left(f^{-1}(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{4x}\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^1 4x \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[2x^2\right]_0^1 \\
&= \pi \cdot \left(\left[2 \cdot 1^2\right] - \left[2 \cdot 0^2\right]\right) \\
&= \pi \cdot (2 - 0) \\
V &\approx 6{,}283
\end{aligned}
$$

Das Volumen beträgt: V ≈ 6,283l

Aufgabe 4

Zunächst werden die Nullstellen bestimmt.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x^2_0 - 9x^2_0 + 24x_0 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Da es sich um ein Polynom dritten Grades handelt, ist eine analytische Lösung nicht moglich. Durch planvolles Raten erhält man z. B. diese Lösung:

$x_{01} = 1$

Damit ist eine Polynomdivision möglich. Es wird dividiert durch ($x - x_{01}$).

$$\begin{array}{rrrrl} (x_0^3 & -9x_0^2 & +24x_0 & -16) & : \; (x_0 - 1) = x_0^2 - 8x_0 + 16 \\ -(x_0^2 & -x_0) & & & \\ \hline -8x_0^2 & +24x_0 & -16 & & \\ - & (-8x_0^2 & +8x_0) & & \\ \hline & & 16x_0 & -16 & \\ & - & (16x_0 & -16) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Übrig bleibt ein Polynom 2. Grades. Dessen Nullstellen können mit Hilfe der *p*-*q*-Formel bestimmt werden.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\ x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\ x_{02/3} &= 4 \pm 0 \\ x_{02} &= 4 \end{aligned}$$

Damit kann das Volumen mit Hilfe der Integralformel bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_1^4 \left(x^3 - 9x^2 + 24x - 16\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_1^4 x^6 - 18x^5 + 129x^4 - 464x^3 + 864x^2 - 768x + 256\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - 3x^6 + \frac{129}{5}x^5 + 116x^4 + 288x^3 - 384x^2 + 256x\right]_1^4 \\
&= \pi \cdot \ \Bigg(\left[\frac{1}{7}\cdot 4^7 - 3\cdot 4^6 + \frac{129}{5}\cdot 4^5 + 116\cdot 4^4 + 288\cdot 4^3 - 384\cdot 4^2 + 256\cdot 4\right]\ldots \\
&\quad \ldots - \left[\frac{1}{7}\cdot 1^7 - 3\cdot 1^6 + \frac{129}{5}\cdot 1^5 + 116\cdot 1^4 + 288\cdot 1^3 - 384\cdot 1^2 + 256\cdot 1\right]\Bigg) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{2\,081\,792}{35} - \frac{10\,463}{35}\right) \\
&= \pi \cdot \frac{2\,071\,329}{35} \\
V &\approx 185\,922
\end{aligned}
$$

Das Volumen betragt: V ≈ 185.822 VE

Aufgabe 5

Zunächst werden die Nullstellen bestimmt.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
x_0^4 - 8x_0^3 + 16x_0^2 &= 0 \\
x_0^2 \cdot (x_0^2 - 8x_0 + 16) = 0 &= 0
\end{aligned}
$$

Ein Lehrsatz sagt: *Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.* Aus dem ersten Faktor ergibt sich sofort:

$x_{01} = 0$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen muss nur noch der zweite Faktor untersucht werden.

$$\begin{aligned}
x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\
x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\
x_{02/3} &= 4 \pm 0 \\
x_{02} &= 4
\end{aligned}$$

Mit diesen beiden Werten stehen die Integrationsgrenzen fest. Damit kann das Volumen mit Hilfe der Integralformel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^4 \left(x_0^4 - 8x_0^3 + 16x_0^2\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^4 x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 256x^5 + 256x^4\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot x^9 - 2x^8 + \frac{96}{7} \cdot x^7 - \frac{128}{3} \cdot x^6 + \frac{256}{5} \cdot x^5\right]_0^4 \\
&= \pi \cdot \left(\left[\frac{1}{9} \cdot 4^9 - 2 \cdot 4^8 + \frac{96}{7} \cdot 4^7 - \frac{128}{3} \cdot 4^6 + \frac{256}{5} \cdot 4^5\right] - 0\right) \\
&= \pi \cdot \frac{131\,072}{315} \\
V &\approx 1\,307{,}222
\end{aligned}$$

Das Volumen betragt: V ≈ $1307{,}222\ VE$

Aufgabe 6

Zunächst muss die Funktion für die Kontur der Riemenlauffläche bestimmt werden. Die allgemeine Form der Funktion lautet:

$f(x) = ax^4 + b$

Bekannt sind zwei Punkte der Funktion: in der Mitte und am Rand.

(1) $f(0) = 400 \Rightarrow a \cdot 0^4 + b = 400 \Rightarrow b = 400$

(2) $f(50) = 375 \Rightarrow a \cdot 50^4 + b = 375$

Aus Gleichung (1) haben wir sofort b = 400 erhalten. Das kann in Gleichung (2) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} a \cdot 50^4 + b &= 375 & \\ a \cdot 6\,250\,000 + 400 &= 375 & \quad | - 400 \\ 6\,250\,000a &= -25 & \quad | : 6\,250\,000 \\ a &= -\frac{1}{250\,000} & \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{250\,000} \cdot x^4 + 400$$

Als nächstes berechne ich das Volumen der Rolle¨V_R ohne die Bohrung mit Hilfe der Integralformel.

$$
\begin{aligned}
V_R &= \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250\,000} \cdot x^4 + 400\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int\limits_{-50}^{50} \frac{1}{62\,500\,000\,000} \cdot x^8 - \frac{2}{625} \cdot x^4 + 160\,000\ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{562\,500\,000\,000} \cdot x^9 - \frac{2}{3\,125} \cdot x^5 + 160\,000 \cdot x\right]_{-50}^{50} \\
&= \pi \cdot \left(\left[\frac{1}{562\,500\,000\,000} \cdot 50^9 - \frac{2}{3\,125} \cdot 50^5 + 160\,000 \cdot 50\right] \ldots\right. \\
&\quad \left.\ldots - \left[\frac{1}{562\,500\,000\,000} \cdot (-50)^9 - \frac{2}{3\,125} \cdot (-50)^5 + 160\,000 \cdot (-50)\right]\right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[\frac{31250}{9} - 200\,000 + 8\,000\,000\right] - \left[-\frac{31250}{9} + 200\,000 - 8\,000\,000\right]\right) \\
&= \pi \cdot \frac{140\,462\,500}{9} \\
V_R &\approx 49\,030\,662
\end{aligned}
$$

Das Volumen der Bohrung V_B kann am einfachsten klassisch als Zylindervolumen berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
V_B &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot 100^2 \cdot 100 \\
V_B &\approx 785\,398
\end{aligned}
$$

Die Differenz ist das Volumen V_{ges} der fertigen Rolle.

$V_{ges} = V_R - V_B \approx 49030662 - 785398 = 48245264$

Das Volumen der Rolle beträgt: V $\approx\ 48.245.264\ mm^3\ =\ 48.245{,}264\ cm^3$

Jetzt muss nur noch die Masse bestimmt werden.

$m = \rho \cdot V$ = 7,2 g/cm³ • 48245,264cm³ ≈ 347366g = 347,366kg

Die Masse Riemenscheibe beträgt: m ≈ $347{,}366\ kg$

Aufgabe 7

Ich rechne in der Einheit Millimeter. Aus Vereinfachungsgründen lasse ich wäahrend der Rechnung diese Einheit weg.

Zunächst müssen die Parameter *a* und *b* in der Funktionsgleichung bestimmt werden. Dazu können die Punkte auf dem Funktionsgraphen am linken und am rechten Rand¨ verwendet werden: $P_1(0;5)$ und $P_2(400;150)$. Die Koordinaten werden für *x* und *y* in die Funktionsgleichung eingesetzt.

(1) $f(0) = 5 \Rightarrow a \cdot e^{b \cdot 0} = 5$

(2) $f(400) = 150 \Rightarrow a \cdot e^{b \cdot 400} = 150$

Aus Gleichung (1) kann sofort *a* bestimmt werden:

$$a \cdot eb \cdot 0 = 5$$

$$a \cdot e^0 = 5$$

$$a \cdot 1 = 5$$

$$a = 5$$

Das Ergebnis wird in (2) eingesetzt, um *b* zu berechnen.

$$\begin{aligned} 5 \cdot e^{b \cdot 400} &= 150 && \mid :5 \\ e^{b \cdot 400} &= 30 && \mid \ln \ldots \\ b \cdot 400 &= \ln 30 && \mid :400 \\ b &= \frac{\ln 30}{400} \\ b &\approx 0{,}0085 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 5 \cdot e^{0{,}0085x}$

Ab hier gibt es (mindestens) zwei verschiedene Methoden, wie man weitermachen kann, um zu einer Lösung zu gelangen.

1. Man berechnet das Volumen des (massiven) Kegelstumpfes auf klassische Weise und das Volumen des Hohlraumes mit der Integralformel und subtrahiert die Ergebnisse voneinander.

2. Man bestimmt die Funktionsgleichung der linearen Funktion, die den Körper außen als Rotationskörper begrenzt. Dann bestimmt man sowohl das Volumen des (massiven) Kegelstumpfes als auch das Volumen des Hohlraumes mit der Integralformel und subtrahiert die Ergebnisse voneinander.

Lösungsvariante 1:

Das Volumen des Kegelstumpfes wird berechnet:

$$\begin{aligned} V_{KS} &= \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \\ &= \frac{\pi \cdot 400}{3} \cdot (150^2 + 150 \cdot 30 + 30^2) \\ &= 3\,720\,000 \cdot \pi \\ V_{KS} &\approx 11\,686\,725 \end{aligned}$$

Das Hohlraumvolumen des Trichters wird mit der Integralformel bestimmt.

$$\begin{aligned} V_{Trichter} &= \pi \cdot \int_a^b \Big(f(x)\Big)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_0^{400} \left(5 \cdot e^{0{,}008\,5x}\right)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_0^{400} 25 \cdot e^{0{,}017x} \,\mathrm{d}x \\ &= 25\pi \cdot \int_0^{400} e^{0{,}017x} \,\mathrm{d}x \\ &= 25\pi \cdot \left[\frac{e^{0{,}017x}}{0{,}017}\right]_0^{400} \\ &\approx 1\,470\pi \cdot \left[e^{0{,}017x}\right]_0^{400} \\ &\approx 4\,618 \cdot \left[e^{0{,}017x}\right]_0^{400} \\ &= 4\,618 \cdot \Big(\left[e^{0{,}017 \cdot 400}\right] - \left[e^{0{,}017 \cdot 0}\right]\Big) \\ &\approx 4\,618 \cdot (900 - 1) \\ V_{Trichter} &\approx 4\,152\,000 \end{aligned}$$

Hiermit wird nun das Gesamtvolumen des fertigen Exponentialtrichters bestimmt.

$$
\begin{aligned}
Vges &= VKS - VTrichter \\
&= 11687000 - 4152000 \\
Vges &= 7535000
\end{aligned}
$$

Das Gesamtvolumen betragt: V_{ges} = 7535 cm³

Hiermit kann die Masse berechnet werden.

$$m = \rho \cdot V_{ges} = 8{,}86\ \text{g/cm}^3 \cdot 7535\text{cm} \approx 66760\text{g}$$

Die Gesamtmasse beträgt: m = 66,760 kg

Lösungsvariante 2:

Für diese Variante muss zunächst die lineare Funktion für die Außenseite des Kegelstumpfes bestimmt werden.

$g(x) = m \cdot x + b$

Der Parameter b ist als Ordinatenabschnitt y_0 mit $b = 30$ bekannt. Nur noch die Steigung m muss berechnet werden.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{150 - 30}{400 - 0} = 0{,}3$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $g(x) = 0{,}3 \cdot x + 30$

Hiermit kann das Kegelstumpfvolumen mit der Integralformel berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
V_{KS} &= \pi \cdot \int_a^b \Big(g(x)\Big)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^{400} (0{,}3 \cdot x + 30)^2 \ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^{400} 0{,}09 \cdot x^2 + 18x + 900 \ \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \Big[0{,}03x^3 + 9x^2 + 900x\Big]_0^{400} \\
&= \pi \cdot \Big([0{,}03 \cdot 400^3 + 9 \cdot 400^2 + 900 \cdot 400] - [0{,}03 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 + 900 \cdot 0]\Big) \\
&= \pi \cdot 3\,720\,000 \\
V_{KS} &\approx 11\,686\,725
\end{aligned}
$$

Der restliche Lösungsweg ist mit dem ersten identisch.