Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

© Wolfgang Kippels

Inhalt

1 Vorwort 2
2 Einleitung 3
3 Vorgehensweise 3
4 Übungsaufgaben 6
5 Lösungen mit Lösungsweg 9

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen "Generationenvertrages":

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Manchmal soll irgendeine technische Größe optimiert werden. Hier kann die Differentialrechnung mit Erfolg eingesezt werden. Aber nicht nur in der Technik gibt es solche Probleme, auch in der Wirtschaft und vielen anderen Bereichen werden oft Optimierungen angestrebt. Hier einige Beispiele:

- Ein Behälter soll aus möglichst wenig Material hergestellt werden.
- Ein Bauteil soll möglichst stabil sein.
- Die Geschwindigkeit eines flussaufwärts fahrenden Rheinschiffes soll auf einen möglichst kleinen Kraftstoffverbrauch eingestellt werden.
- Bei welchem Aussteuerungsgrad wird die Endstufe einer Stereo-Anlage am heißesten? Danach wird dann der Kühlkörper bemessen.
- Bei welchem Einfallswinkel wird das Licht in einem Regentropfen am wenigsten gebrochen? Das Ergebnis zeigt sich in der Position des Regenbogens.

3 Vorgehensweise

Die Idee ist folgende: Kann man eine Funktion aufstellen, die die zu optimierdende Größe als Funktionswert liefert, dann muss man nur ein Minimum oder ein Maximum dieser Funktion suchen. Dies geschieht nach dem bekannten Verfahren, indem man nämlich die Funktion ableitet und gleich Null setzt. Danach muss man prüfen, ob die gefundenen Kandidaten Minima oder Maxima darstellen.
Ich möchte die Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel darstellen. Dabei wird die allgemeine Vorgehensweise neben dem Beispiel dargestellt.

Beispiel: Ein Schäfer will mit $100\,m$ Maschendraht für einen Zaun ein rechteckiges Feld für seine Schafe begrenzen, so dass die Fläche darin möglichst groß wird. Welche Länge l und Breite b muss das Rechteck erhalten?

Vorgehensweise:

Schritt 1:

Man stellt eine Funktionsgleichung (die sogenannte **Hauptbedingung**) auf, die als Ergebnis die zu **optimierende Größe** liefert. Dabei kommt zunächst meist mehr als eine Variable vor.
(*Der häufigste Fehler beim Lösen von Extremwertaufgaben liegt übrigens darin, dass **nicht** die zu optimierende Größe als Hauptbedingung verwendet wird!*)

Beispiel:

Schritt 1:

Die zu optimierende Größe ist die Fläche ***A***. Mit den beiden Variablen ***l*** und ***b*** für die Länge und Breite des Rechteckes ergibt sich: $A = l \cdot b$

Schritt 2:

Man stellt eine Beziehung (eine sogenannte **Nebenbedingung**) zwischen den Variablen auf und stellt diese nach einer beliebigen Variablen um. Bei drei Variablen sind zwei Nebenbedingungen erforderlich, bei vier Variablen drei Nebenbedingungen, usw. Hat man keine Idee, woraus man die Nebenbedingung(en) erstellen kann, schaut man nach, welche Angaben in der Aufgabenstellung noch nicht ausgenutzt worden sind.

Schritt 2:

Bekannt ist der Umfang des Rechteckes, die Gesamtlänge des Zaunes. Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} & 2l + 2b & = & 100m \\ \Leftrightarrow & 2l & = & 100m - 2b \\ \Leftrightarrow & l & = & 50m - b \end{array}$$

Schritt 3:

Die umgestellte(n) Nebenbedingung(en) wird (werden) in die Funktionsgleichung – die Hauptbedingung – eingesetzt. Man erhält eine Funktion von nur noch einer Variablen.

Schritt 3:

Einsetzen von l in die Hauptbedingung ergibt:

$$A = (50m - b) \cdot b$$

Die Fläche ***A*** als Funktion der Breite ***b*** lautet dann:

$$\begin{aligned} & A(b) &=& \ (50m - b) \cdot b \\ \Leftrightarrow\ & A(b) &=& \ 50m \cdot b - b^2 \end{aligned}$$

Schritt 4:

Die Funktion wird nach der verbliebenen Variablen abgeleitet und gleich Null gesetzt, um Kandidaten für einen Extremwert zu erhalten.

Schritt 4:

$$\begin{aligned} & A'(b) &=& \ 50m - 2b \\ \Rightarrow\ & 0 &=& \ 50m - 2b_E \\ \Leftrightarrow\ & 2b_E &=& \ 50m \\ \Leftrightarrow\ & b_E &=& \ 25m \end{aligned}$$

Schritt 5:

Mit Hilfe der zweiten Ableitung (oder einem anderen Verfahren) wird geprüft, ob entsprechend der Aufgabenstellung ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Schritt 5:

$$A''(b) = -2 < 0$$
$$\Rightarrow \quad Maximumbeib_E = 25m$$

Schritt 6:

Die restlichen Größen laut Aufgabenstellung werden bestimmt.

(*In der Praxis werden hier oft Punkte verschenkt, weil man froh ist, die eigentliche Aufgabe gelöst zu haben und daher diesen Teil übersieht.*)

Schritt 6:

Alle Seitenlängen des Rechteckes sind gesucht, es fehlt also noch die Länge l_E. Ich verwende zur Berechnung die entsprechend umgestellte Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} & l &=& \ 50m - b \\ \Rightarrow\ & l_E &=& \ 50m - 25m = 25m \end{aligned}$$

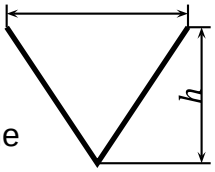
4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Eine zylinderförmige Konservendose mit dem Volumen V soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe h und den Durchmesser d der Dose.

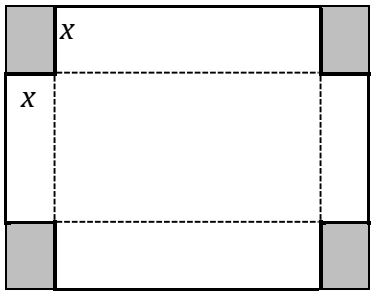
Aufgabe 2

Eine V-förmige Rinne soll aus einem $30\ cm$ breiten Blechstreifen geformt werden. Welche Breite b und welche Höhe h muss die Rinne bekommen, damit ihr Querschnitt möglichst groß wird? Damit ist gemeint, dass die Rinne möglichst viel Wasser transportieren kann, wenn sie randvoll gefüllt ist.



Aufgabe 3

Aus einer Blechtafel mit $480\ mm$ Länge und $300\ mm$ Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge x müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen V des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen V?



Aufgabe 4

In eine Kugel mit dem Durchmesser D soll ein möglichst großer Zylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmasser d und die Höhe h des Zylinders.

Aufgabe 5

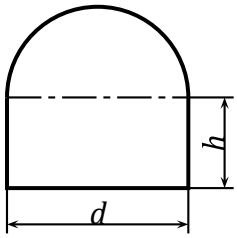
Eine Schublade mit quadratischem Grundriss besteht aus 4 dicken Seitenteilen aus Holz sowie aus einem dünnen Boden. Die Seitenteile sind doppelt so dick wie der Boden. Welche Abmessungen soll die Schublade haben, damit sie bei einem Fassungsvermögen von 16 Litern möglichst wenig wiegt?

Aufgabe 6

In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge l soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden. Wie lang sind die Rechteckseiten a und b?

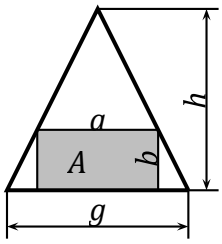
Aufgabe 7

Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe h und der Durchmesser d zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittfläche von $5\,m^2$ einen möglichst kleinen Umfang hat?



Aufgabe 8

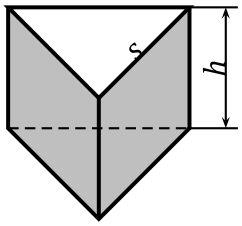
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe h und der Grundseite g. In dieses Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben, wie nebenstehend dargestellt. Die Rechteckseiten a und b sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt A des Rechtecks möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Rechteckseiten a und b sowie die sich ergebende Fläche A für diesen Fall.



Aufgabe 9

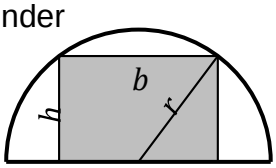
Ein oben offener prismatischer Behälter mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche soll hergestellt werden. Das Volumen des Behälters soll $8\,dm^3$ betragen. Der Behälter soll so gebaut werden, dass dabei der Blechverbrauch minimal wird.

Bestimmen Sie die Höhe h des Behälters und die Seitenlänge s des Grundflächendreiecks für diese Bedingungen.



Aufgabe 10

In einen halbkreisförmigen Wanddurchbruch soll gemäß nebenstehender Skizze ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fläche A eingebaut werden. Bestimmen Sie die Höhe h und die Breite b des optimalen Fensters, wenn der Bogenradius r bekannt ist.



Aufgabe 11

Eine zylinderförmige oben offene Regenwassersammeltonne mit einem Volumen von $V = 200\ Liter$ soll so hergestellt werden, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Welchen Durchmesser d und welche Höhe h muss die Tonne haben?

Aufgabe 12

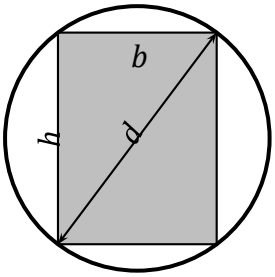
Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von $500\ m^3$ soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei schlagen die Wände mit 1000 je m^2, die Decke mit 600 je m^2 sowie der Boden mit 400 je m^2 zu Buche. Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

Aufgabe 13

Aus einem runden Baumstamm mit einem Durchmesser von $d = 60\ cm$ soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und einem möglichst großen Widerstandsmoment geschnitten werden. Das Widerstandsmoment kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Bestimmen Sie die Höhe h und die Breite b des günstigsten rechteckigen Querschnitts!



5 Lösungen mit Lösungsweg

Aufgabe 1

Eine zylinderförmige Konservendose mit dem Volumen V soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe h und den Durchmesser d der Dose.

Lösung:

Der "'Blechverbrauch"' soll optimiert werden. Das ist die Oberfläche der Dose, also Mantel + Deckel + Boden. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = \pi \cdot d \cdot h + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Die Hauptbedingung enthält 2 Variablen (d und h). Deshalb benötigen wir noch genau eine **Nebenbedingung**. Diese erhalten wir mit Hilfe des bekannten Volumens V:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir müssen die **Nebenbedingung** nach d oder h umstellen und in die **Hauptbedingung** einsetzen. Da sie sich einfacher nach h als nach d umstellen lässt, tun wir das.

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad | \cdot 4$$

$$4V = \pi \cdot d^2 \cdot h \quad |: (\pi \cdot d^2)$$

$$\frac{4V}{\pi \cdot d^2} = h$$

Eingesetzt in die Hauptbedingung erhalten wir A als eine Funktion von d.

$$A(d) = \pi \cdot d \cdot \frac{4V}{\pi \cdot d^2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$A(d) = \frac{4V}{d} + \frac{\pi}{2} \cdot d^2$$

$$A(d) = 4V \cdot d^{-1} + \frac{\pi}{2} \cdot d^2$$

$$A'(d) = -4V \cdot d^{-2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot d$$

$$A'(d) = -4V \cdot d^{-2} + \pi \cdot d$$

$$A'(d) = -\frac{4V}{d^2} + \pi \cdot d$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist, dass die erste Ableitung gleich 0 ist.

$$-\frac{4V}{d_E^2} + \pi \cdot d_E = 0 \quad | + \frac{4V}{d_E^2}$$

$$\pi \cdot d_E = \frac{4V}{d_E^2} \quad | \cdot d_E^2$$

$$\pi \cdot d_E^3 = 4V \quad | : \pi$$

$$d_E^3 = \frac{4V}{\pi} \quad | \sqrt[3]{\ }$$

$$d_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob der gefundene Wert für d tatsächlich ein Minimum ergibt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$A'(d) = -4V \cdot d^{-2} + \pi \cdot d$$

$$A''(d) = 8V \cdot d^{-3} + \pi$$

$$A''(d_E) = 8V \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^{-3} + \pi$$

$$A''(d_E) = 8V \cdot \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{-1} + \pi$$

$$A''(d_E) = 8V \cdot \frac{\pi}{4V} + \pi$$

$$A''(d_E) = 2 \cdot \pi + \pi$$

$$A''(d_E) = 3 \cdot \pi > 0 \quad \Rightarrow \quad Tiefpunkt$$

Zuletzt muss noch h_E bestimmt werden. Das geschieht am einfachsten durch Einsetzen von d_E in die umgestellte Nebenbedingung am Anfang.

$$h = \frac{4V}{\pi \cdot d^2}$$

$$h_E = \frac{4V}{\pi \cdot d_E^2}$$

$$h_E = \frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2}$$

$$h_E = \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2V^2}{\pi^2}}}$$

$$h_E = \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 4^2V^2}{\pi^2}}}$$

$$h_E = \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 4^2V^2}}$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{4^3 V^3}{\pi \cdot 4^2 V^2}}$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Bei der optimalen Dose ist also Höhe und Durchmesser gleich.

$$d_E = h_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Aufgabe 2

Eine V-förmige Rinne soll aus einem $30\ cm$ breiten Blechstreifen geformt werden. Welche Breite b und welche Höhe h muss die Rinne bekommen, damit ihr Querschnitt möglichst groß wird? Damit ist gemeint, dass die Rinne möglichst viel Wasser transportieren kann, wenn sie randvoll gefüllt ist.

Lösung:

Der Querschnitt der Rinne soll optimiert werden. Das ist die dreieckförmige Fläche. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Um die Nebenbedingung besser erkennen zu können, zeichnet man zweckmäßigerweise in das Dreieck, dessen Fläche optimiert werden soll, die Höhe h ein. Man erhält dadurch zwei rechtwinklige Teildreiecke mit den Katheten h und $\frac{b}{2}$ sowie der Hypotenuse $15\ cm$. In diesen Teildreiecken gilt der Satz des Pythagoras. Damit erhalten wir die **Nebenbedingung**:

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (15cm)^2$$

Die Nebenbedingung stellen wir zweckmäßigerweise nach b um, denn dann verschwinden die Brüche.

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (15cm)^2$$

$$h^2 + \frac{b^2}{4} = 225cm^2 \quad | - h^2$$

$$\frac{b^2}{4} = 225\ cm^2 - h^2 \quad | \cdot 4$$

$$b^2 = 900cm^2 - 4h^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$b = \sqrt{900cm^2 - 4h^2}$$

Die umgestellte Nebenbedingung setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion $A(h)$. Die Funktion leiten wir nach h ab und setzen sie gleich Null, um Extrema zu bestimmen.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A(h) = \frac{\sqrt{900cm^2 - 4h^2} \cdot h}{2}$$

$$A(h) = \frac{1}{2}\sqrt{900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4}$$

$$A(h) = \frac{1}{2}(900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{\frac{1}{2}} \quad |(Kettenregel\ anwenden)$$

Für die Anwendung der Kettenregel[1] machen wir eine Nebenrechnung, in der die Funktion $A(h)$ aufgespalten wird in eine Funktion $A(g(h))$. Dann ist $A(g)$ die **äußere** und $g(h)$ die **innere** Funktion.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(h) & = & 900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4 & \Rightarrow & g'(h) & = & 1800cm^2 \cdot h^1 - 16h^3 \\ A(g) & = & \frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow & A'(g) & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot g^{\frac{1}{2}-1} \\ & & & & A'(g) & = & \frac{1}{4} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \\ & & & & A'(g) & = & \frac{1}{4} \cdot (900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

Mit diesen Nebenrechnungen können wir die Kettenregel anwenden:

$$A'(h) = g'(h) \cdot A'(g)$$

$$A'(h) = \underbrace{(1800cm^2 \cdot h - 16h^3)}_{innere\ Ableitung} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}(900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}}}_{äußere\ Ableitung}$$

$$A'(h) = \frac{1800cm^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4}}$$

$$0 = \frac{1800cm^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4}} \quad | \cdot 4\sqrt{900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4}$$

$$0 = 1800cm^2 \cdot h - 16h^3$$

$$0 = h(1800cm^2 - 16h^2) \quad \Rightarrow h_{E1} = 0(entfällt)$$

$$0 = 1800cm^2 - 16h^2 \quad |:16$$

$$0 = 112{,}5cm^2 - h^2 \quad | + h^2$$

$$h^2 = 112{,}5cm^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$h_{2/3} = \pm\sqrt{112{,}5}cm \approx \pm 10{,}6066cm$$

Der negative Wert entfällt ebenso, wie zuvor schon $h_{E1} = 0$. Es bleibt also nur:

$$h_E = \sqrt{112{,}5}cm \approx 10{,}6066cm$$

Es muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Da die Bestimmung der zweiten Ableitung recht mühsam ist, möchte ich für die Prüfung das Verfahren

[1] Einzelheiten zur Kettenregel siehe hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf

verwenden, das mit der ersten Ableitung auskommt[2]. Ich setze die Werte $10cm$ und $11cm$ in die erste Ableitung ein um zu prüfen, ob ein Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ vorliegt.

$$A'(h) = \frac{1800cm^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900cm^2 \cdot h^2 - 4h^4}}$$

$$A'(10cm) = \frac{1800cm^2 \cdot 10cm - 16 \cdot (10cm)^3}{4\sqrt{900cm^2 \cdot (10cm)^2 - 4(10cm)^4}}$$

$$= \frac{2000cm^3}{4\sqrt{50000cm^4}} > 0$$

$$A'(11cm) = \frac{1800cm^2 \cdot 11cm - 16 \cdot (11cm)^3}{4\sqrt{900cm^2 \cdot (11cm)^2 - 4(11cm)^4}}$$

$$= \frac{-1496cm^3}{4\sqrt{50336cm^4}} < 0$$

Wir erhalten bei $h_E = \sqrt{112{,}5}cm$ – wie erwartet – einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Es liegt also tatsächlich ein Maximum vor. Es fehlt nur noch die Berechnung der Breite b_E.

$$b_E = \sqrt{900cm^2 - 4h^2} = \sqrt{900cm^2 - 4 \cdot \left(\sqrt{112{,}5}cm\right)^2} = \sqrt{450}cm \approx 21{,}2132cm$$

Zusammengefasst: $h_E = \sqrt{112{,}5}cm \qquad b_E = \sqrt{450}cm$

[2] Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf

Aufgabe 3

Aus einer Blechtafel mit $480mm$ Länge und $300mm$ Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge x müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen V des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen V?

Lösung:

Benennen wir die Seiten des fertigen Kastens mit a (die kürzere Seite) und b (die längere Seite), dann erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$V = a \cdot b \cdot x$$

Hierin sind noch 3 Variablen enthalten, wir brauchen also noch 2 **Nebenbedingungen**. Diese ergeben sich durch die Seitenlängen.

$$a = 300mm - 2x$$

$$b = 480mm - 2x$$

Diese setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten V als Funktion von x. Wir leiten sie dann nach x ab, setzen sie gleich Null und erhalten die Kandidaten für die Lösungen:

$$V(x) = (300mm - 2x) \cdot (480mm - 2x) \cdot x$$

$$V(x) = 144000mm^2 \cdot x - 600mm \cdot x^2 - 960mm \cdot x^2 + 4x^3$$

$$V(x) = 144000mm^2 \cdot x - 1560mm \cdot x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 144000mm^2 - 3120mm \cdot x + 12x^2$$

$$0 = 144000mm^2 - 3120mm \cdot x + 12x^2 \quad |:12$$

$$0 = 12000mm^2 - 260mm \cdot x + x^2 \quad |p - q - Formel$$

$$x_{E1/2} = 130mm \pm \sqrt{130^2mm^2 - 12000mm^2}$$

$$= 130mm \pm \sqrt{16900mm^2 - 12000mm^2}$$

$$= 130mm \pm 70mm$$

$$x_{E1} = \underline{200mm}$$

$$x_{E2} = \underline{60mm}$$

Wie man sehr schnell erkennt, kommt $x_{E1} = 200mm$ nicht als Lösung in Frage, denn würde man so weit in das Blech einschneiden, bliebe weniger als nichts übrig. Wir müssen also nur die Lösung $x_{E2} = 60mm$ auf ein Maximum prüfen. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$V'(x) = 144000mm^2 - 3120mm \cdot x + 12x^2$$

$$V''(x) = -3120mm + 24x$$

$$V''(x_{E2}) = -3120mm + 24 \cdot 60mm$$

$$= -1680mm < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum!$$

Zum Schluss berechnen wir noch das gesuchte Volumen:

$$V(x) = 144000mm^2 \cdot x - 1560mm \cdot x^2 + 4x^3$$

$$V(x_{E2}) = 144000mm^2 \cdot 60mm - 1560mm \cdot (60mm)^2 + 4 \cdot (60mm)^3$$

$$= 3888000mm^3$$

$$V(x_{E2}) = 3{,}888l$$

Hier noch einmal die Lösungen zusammengefasst:

$$x_E = 60mm, \quad V_E = 3{,}888l$$

Aufgabe 4

In eine Kugel mit dem Durchmesser D soll ein möglichst großer Zylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmasser d und die Höhe h des Zylinders.

Lösung:

Da das Zylindervolumen maximal werden soll, ergibt die Formel für das Zylindervolumen die **Hauptbedingung**:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Diese können wir am besten erkennen, wenn man sich eine Skizze von der Seitenansicht anfertigt. Wir erhalten einen Kreis (die Kugel) mit dem Durchmesser D und darin ein Rechteck (Seitenansicht des Zylinders) mit den Seiten h und d. Zeichnet man den Kugeldurchmesser als Diagonale in das Rechteck ein, dann erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhält man als Zusammenhang zwischen D, d und h die **Nebenbedingung**:

$$D^2 = d^2 + h^2$$

Ob man nun diese Nebenbedingung nach d oder h umstellt, ist im Prinzip gleichgültig. Da aber in der Hauptbedingung nur d^2 (nicht d) vorkommt, ist es sehr pfiffig, die Nebenbedingung nur nach d^2 umzustellen.

$$d^2 = D^2 - h^2$$

Das setzen wir in die Hauptbedingung ein, vereinfachen sie, leiten sie ab, setzen die Ableitung gleich Null und bestimmen die Lösung.

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - h^2) \cdot h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h - \frac{\pi}{4} \cdot h^3$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h^2$$

$$0 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h_E^2 \quad |: \frac{\pi}{4}$$

$$0 = D^2 - 3 \cdot h_E^2 \quad | + 3 \cdot h_E^2$$

$$3 \cdot h_E^2 = D^2 \quad |:3$$

$$h_E^2 = \frac{1}{3} D^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$h_E = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D$$

$$h_{E1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D$$

$$h_{E2} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D \quad (entfällt)$$

Da die Ableitungen recht einfach zu bestimmen sind, verwende ich die zweite Ableitung zur Überprüfung, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$V'(h) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h^2$$

$$V''(h) = -\frac{6\pi}{4} \cdot h$$

$$V''(h) = -\frac{3\pi}{2} \cdot h$$

$$V''(h_E) = -\frac{3\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

Wir berechnen noch schnell den fehlenden Zylinderdurchmesser d mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung:

$$d^2 = D^2 - h^2$$

$$d = \sqrt{D^2 - h^2}$$

$$d_E = \sqrt{D^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D\right)^2}$$

$$= \sqrt{D^2 - \frac{1}{3} \cdot D^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot D^2}$$

$$d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D$$

Hier wieder die Zusammenfassungen der Lösungen:

$$d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \quad h_E = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D$$

Aufgabe 5

Eine Schublade mit quadratischem Grundriss besteht aus 4 dicken Seitenteilen aus Holz sowie aus einem dünnen Boden. Die Seitenteile sind doppelt so dick wie der Boden. Welche Abmessungen soll die Schublade haben, damit sie bei einem Fassungsvermögen von 16 Litern möglichst wenig wiegt?

Lösung:

Ich benenne die Seiten des quadratischen Bodens mit a und die Höhe mit h. Wie lautet nun die Hauptbedingung? Nicht das Volumen, wie manch einer annehmen mag, sondern das Gewicht (genauer: die Masse) der Schublade ergibt die Hauptbedingung. Da wir jedoch weder die Wandstärke noch die Dichte von Holz angegeben haben, nehmen wir die ***gewichtete Oberfläche*** als **Hauptbedingung**. Was ist damit gemeint? Ganz einfach, ich zähle die dicken Seiten doppelt und den dünnen Boden nur einfach.

$$G = 4 \cdot 2 \cdot a \cdot h + 1 \cdot a^2$$

$$G = 8 \cdot a \cdot h + a^2$$

Die **Nebenbedingung** finden wir über das Volumen V. Ich stelle sie sofort nach h um.

$$V = a^2 \cdot h \quad |: a^2$$

$$h = \frac{V}{a^2}$$

Die umgestellte Nebenbedingung wird in die Huptbedingung eingesetzt und wir erhalten die Funktion $G(a)$. Wir leiten sie ab, setzen sie gleich Null und lösen nach a auf.

$$G = 8 \cdot a \cdot h + a^2$$

$$G(a) = 8 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} + a^2$$

$$G(a) = \frac{8V}{a} + a^2$$

$$G(a) = 8V \cdot a^{-1} + a^2$$

$$G'(a) = -8V \cdot a^{-2} + 2a$$

$$0 = -8V \cdot a_E^{-2} + 2a_E$$

$$0 = -\frac{8V}{a_E^2} + 2a_E \quad | + \frac{8V}{a_E^2}$$

$$\frac{8V}{a_E^2} = 2a_E \quad | \cdot a_E^2$$

$$8V = 2a_E^3 \quad |:2$$

$$4V = a_E^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$a_E = \sqrt[3]{4V}$$

Mit der zweiten Ableitung prüfen wir, ob tatsächlich das gesuchte Minimum vorliegt.

$$G'(a) = -8V \cdot a^{-2} + 2a$$

$$G''(a) = 16V \cdot a^{-3} + 2$$

$$G''(a) = \frac{16V}{a^3} + 2$$

$$G''(a_E) = \frac{16V}{\left(\sqrt[3]{4V}\right)^3} + 2$$

$$= \frac{16V}{4V} + 2$$

$$= 4 + 2$$

$$G''(a_E) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad Minimum$$

Nun können wir die noch fehlende Höhe h der Schublade aus der umgestellten Nebenbedingung berechnen.

$$h_E = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{4V}\right)^2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{V^3}{(4V)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{V^3}{16V^2}}$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{V}{16}}$$

Mit dem gegebenen Wert von $V = 16l = 16dm^3$ können wir die konkreten Werte für a und h berechnen.

$$a_E = \sqrt[3]{4 \cdot 16dm^3} = 4dm$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{16dm^3}{16}} = 1dm$$

Wir fassen die Lösungen zusammen und geben sie in der etwas gebräuchlicheren Einheit Zentimeter an.

$a_E = 40cm \quad h_E = 10cm$

<u>Aufgabe 6</u>

In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge l soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden. Wie lang sind die Rechteckseiten a und b?

Lösung:

Zur Lösung betrachten wir die nebenstehende Skizze. Optimiert werden soll die Rechteckfläche. Damit erhalten wir die **<u>Hauptbedingung</u>**.

$$A = a \cdot b$$

Die Hauptbedingung enthält zwei Variablen, also benötigen wir noch genau eine **<u>Nebenbedingung</u>**. Diese können wir über Strahlensätze, Winkelfunktionen (Tangens) oder Ähnlichkeit von Dreiecken erhalten. Alle Ansätze führen auf ähnliche Formeln wie diese:

$$\frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{b}{\frac{l-a}{2}}$$

In dieser Nebenbedingung ist noch eine weitere Größe aufgetaucht, nämlich h. Da das Dreieck als gleichseitig bekannt ist, können wir h mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \quad | -\frac{l^2}{4}$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4} \cdot l^2 = h^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

Diesen Wert setzen wir in die Nebenbedingung ein und stellen diese nach b um.

$$\frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{b}{\frac{l-a}{2}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l}{\frac{l}{2}} = \frac{b}{\frac{l-a}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot l \cdot 2}{2 \cdot l} = \frac{b \cdot 2}{l-a}$$

$$\sqrt{3} = \frac{b \cdot 2}{l-a} \quad | \cdot (l-a)$$

$$\sqrt{3} \cdot (l-a) = b \cdot 2 \quad |:2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l-a) = b$$

Die umgestellte Nebenbedingung kann nun in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Wir erhalten dann die Funktion $A(a)$, die wir ableiten und gleich Null setzen.

$$A = a \cdot b$$

$$A(a) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l-a)$$

$$A(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

$$A'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a \quad | + \sqrt{3} \cdot a$$

$$\sqrt{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \quad |:\sqrt{3}$$

$$a_E = \frac{1}{2} \cdot l$$

Die Prüfung, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt, machen wir mit der zweiten Ableitung, denn die ist recht einfach zu bilden.

$$A'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a$$

$$A''(a) = -\sqrt{3}$$

$$A''(a_E) = -\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

Zum guten Schluss bestimmen wir die noch fehlende Rechteckbreite b.

$$b_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l - a_E) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(l - \frac{1}{2} \cdot l\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l$$

Hier noch einmal die Ergebnisse zusammengefasst:

$$a_E = \frac{1}{2} \cdot l \quad b_E = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l$$

<u>Aufgabe 7</u>

Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe h und der Durchmesser d zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittfläche von $5m^2$ einen möglichst kleinen Umfang hat?

Lösung:

Optimiert werden soll der Umfang, das sind drei Seiten des Rechtecks und ein Halbkreis. Das ist demnach die **<u>Hauptbedingung</u>**:

$$U = 2 \cdot h + d + \frac{1}{2}\pi \cdot d$$

Die **<u>Nebenbedingung</u>** bekommen wir über die Querschnittfläche, also Rechteck plus Halbkreis:

$$A = h \cdot d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

$$A = h \cdot d + \frac{\pi}{8} d^2$$

Am einfachsten kann man diese Gleichung nach h umstellen.

$$A = h \cdot d + \frac{\pi}{8} d^2 \quad | -\frac{\pi}{8} d^2$$

$$A - \frac{\pi}{8} d^2 = h \cdot d \quad |: d$$

$$\frac{A - \frac{\pi}{8} d^2}{d} = h$$

$$\frac{A}{d} - \frac{\pi}{8} d = h$$

Das setzen wir in die Hauptbedingung ein, vereinfachen sie, leiten sie ab, setzen die Ableitung gleich Null und bestimmen die Lösung.

$$U(d) = 2 \cdot (\frac{A}{d} - \frac{\pi}{8}d) + d + \frac{1}{2}\pi \cdot d$$

$$U(d) = \frac{2A}{d} - \frac{\pi}{4}d + d + \frac{1}{2}\pi \cdot d$$

$$U(d) = 2A \cdot d^{-1} + \left(-\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot d$$

$$U(d) = 2A \cdot d^{-1} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot d$$

$$U'(d) = -2A \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$0 = -2A \cdot d_E^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1 \quad | + 2A \cdot d_E^{-2}$$

$$2A \cdot d_E^{-2} = \frac{\pi}{4} + 1 \quad | \cdot d_E^2$$

$$2A = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot d_E^2 \quad |: \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$$

$$\frac{2A}{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)} = d_E^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$d_E = \sqrt{\frac{2A}{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}}$$

$$d_E = \sqrt{\frac{2A}{\left(\frac{\pi+4}{4}\right)}}$$

$$d_E = \sqrt{\frac{8A}{\pi+4}}$$

Die Prüfung, ob damit ein Maximum oder – wie gewünscht – ein Minimum vorliegt, machen wir mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$U'(d) = -2A \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$U''(d) = 4A \cdot d^{-3}$$

$$U''(d) = \frac{4A}{d^3}$$

$$U''(d_E) = \frac{4A}{\left(\sqrt{\frac{8A}{\pi+4}}\right)^3}$$

Ohne diesen Term weiter umformen zu müssen, kann man sagen, dass gilt: $U''(d_E) > 0$ Warum? A ist positiv. Damit ist auch der Bruch unter der Wurzel positiv, denn damit ist sowohl der Zähler als auch der Nenner positiv. Die Wurzel ist demnach lösbar und auch positiv, und auch, wenn ich sie mit 3 potenziere, ist das Ergebnis positiv. Im Hauptbruch ist damit der Zähler und der Nenner positiv, also ist $d_E > 0$. Wir haben damit nachgewiesen, dass ein <u>Minimum</u> vorliegt.

Berechnen wir nun die Höhe h. Dafür verwenden wir die umgestellte Formel aus der Nebenbedingung.

$$h = \frac{A}{d} - \frac{\pi}{8} d$$

$$h_E = \frac{A}{d_E} - \frac{\pi}{8} \cdot d_E$$

$$h_E = \frac{A}{\sqrt{\frac{8A}{\pi+4}}} - \frac{\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{8A}{\pi+4}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{\frac{8A}{\pi+4}}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{8A}{8^2 \cdot (\pi+4)}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2 \cdot (\pi+4)}{8A}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{8 \cdot (\pi+4)}}$$

$$= \sqrt{\frac{A \cdot (\pi+4)}{8}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{8 \cdot (\pi+4)}}$$

Setzt man für A den angegebenen Wert $A = 5m^2$ ein, erhält man die Lösungen:

$h_E \approx 1{,}183m \quad d_E \approx 2{,}367m$

Aufgabe 8

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe h und der Grundseite g. In dieses Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben, wie nebenstehend dargestellt. Die Rechteckseiten a und b sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt A des Rechtecks möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Rechteckseiten a und b sowie die sich ergebende Fläche A für diesen Fall.

Lösung:

Die Rechteckfläche soll möglichst groß werden. Das ergibt unsere **Hauptbedingung**:

$$A = a \cdot b$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Diese können wir auf vielfältige Arten gewinnen. Damit man das besser sieht, sollte man die Dreieckshöhe in der Mitte des Dreiecks einzeichnen. Man kann dann über Strahlensätze, ähnliche Dreiecke oder auch mit der Definition des Tangens (z. B. der Winkel unten rechts) die Gleichung der **Nebenbedingung** aufstellen:

$$\frac{h}{\frac{g}{2}} = \frac{b}{\frac{g-a}{2}}$$

Wir können diese Gleichung nach a oder b auflösen und in die Hauptbedingung einsetzen. Ich löse nach b auf, weil mir das etwas einfacher erscheint.

$$\frac{h}{\frac{g}{2}} = \frac{b}{\frac{g-a}{2}}$$

$$\frac{2h}{g} = \frac{2b}{g-a} \quad | \cdot (g-a)$$

$$\frac{2h \cdot (g-a)}{g} = 2b \quad |:2$$

$$b = \frac{h \cdot (g-a)}{g}$$

Diesen Term setzen wir nun in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion $A(a)$. Wir setzen sie gleich Null und lösen nach a auf.

$$A = a \cdot b$$

$$A(a) = a \cdot \frac{h \cdot (g - a)}{g}$$

$$A(a) = \frac{a \cdot h \cdot (g - a)}{g}$$

$$A(a) = \frac{a \cdot h \cdot g - a^2 \cdot h}{g}$$

$$A(a) = \frac{a \cdot h \cdot g}{g} - \frac{a^2 \cdot h}{g}$$

$$A(a) = a \cdot h - \frac{a^2 \cdot h}{g}$$

$$A'(a) = h - \frac{2a \cdot h}{g}$$

$$0 = h - \frac{2a_E \cdot h}{g} \quad | + \frac{2a_E \cdot h}{g}$$

$$\frac{2a_E \cdot h}{g} = h \quad | \cdot g$$

$$2a_E \cdot h = h \cdot g \quad |: 2h$$

$$a_E = \frac{g}{2}$$

Wir bilden die zweite Ableitung und prüfen damit, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$A'(a) = h - \frac{2a \cdot h}{g}$$

$$A''(a) = -\frac{2h}{g}$$

$$A''(a_E) = -\frac{2h}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

Die Folgerung war zuässig, da h und g stets als positiv bekannt sind. Bestimmen wir zum Schluss noch die fehlende Rechteckseite b.

$$b = \frac{h \cdot (g - a)}{g}$$

$$b_E = \frac{h \cdot (g - \frac{g}{2})}{g}$$

$$b_E = \frac{h \cdot \frac{g}{2}}{g}$$

$$b_E = \frac{h}{2}$$

Fassen wir die Ergebnisse abschließend noch einmal zusammen:

$a_E = \frac{g}{2} \quad b_E = \frac{h}{2}$

<u>Aufgabe 9</u>

Ein oben offener prismatischer Behälter mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche soll hergestellt werden. Das Volumen des Behälters soll $8dm^3$ betragen. Der Behälter soll so gebaut werden, dass dabei der Blechverbrauch minimal wird. Bestimmen Sie die Höhe h des Behälters und die Seitenlänge s des Grundflächendreiecks für diese Bedingungen.

Lösung:

Optimiert werden soll die Fläche, bestehend aus Mantel- und Bodenfläche des Prismas. Die Bodenfläche hat dabei die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Zur Berechnung dieser Bodenfläche benötigt man neben der bekannten Seite s auch die Höhe dieses Dreiecks – nennen wir sie h_d. Dazu betrachten wir die nebenstehend dargestellte Bodenfläche. In rechten grau unterlegten rechtwinkligen Teildreieck können wir den Satz des Pythagoras anwenden, um daraus h_d zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
h_d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 &= s^2 \\
h_d^2 &= s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\
h_d^2 &= s^2 - \frac{1}{4}s^2 \\
h_d^2 &= \frac{3}{4}s^2 \\
h_d &= \sqrt{\frac{3}{4}s^2} \\
h_d &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s
\end{aligned}$$

Damit kann die Bodenfläche bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
A_B &= \frac{s \cdot h_b}{2} \\
&= \frac{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s}{2} \\
A_B &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2
\end{aligned}
$$

Mit dieser Fläche und den drei rechteckigen Seitenflächen kann nun die **<u>Hauptbedingung</u>** aufgestellt werden:

$$A = 3 \cdot \overbrace{s \cdot h}^{Seiten} + \overbrace{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2}^{Boden}$$

Das Volumen des Behälters ist bekannt. Damit erhalten wir die **<u>Nebenbedingung</u>**:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \cdot h$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer der beiden Variablen s oder h umgestellt werden, damit der sich ergebende Term in die Hauptbedingung eingesetzt werden kann. Es ist offensichtlich einfacher die Nebenbedingung nach h statt nach s umzustellen. Daher wählen wir diesen Weg.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \cdot h \quad |: \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2\right)$$

$$\frac{V}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2} = h$$

$$\frac{4 \cdot V}{\sqrt{3} \cdot s^2} = h$$

Diesen Term können wir nun in die Hauptbedingung einsetzen. Wir erhalten dann die Funktion $A(s)$, die wir ableiten und gleich Null setzen können. Durch Umstellen bekommen wir dann s.

$$A = 3 \cdot s \cdot h + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$$

$$A(s) = 3 \cdot s \cdot \frac{4 \cdot V}{\sqrt{3} \cdot s^2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$$

$$A(s) = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V}{s} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$$

$$A(s) = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot V \cdot s^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$$

$$A'(s) = -\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V \cdot s^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$$

$$A'(s) = -\frac{\sqrt{3}\cdot 4\cdot V}{s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}\cdot 4\cdot V}{s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s \quad |\cdot 2s^2$$

$$0 = -\sqrt{3}\cdot 8\cdot V + \sqrt{3}\cdot s^3 \quad |:\sqrt{3}$$

$$0 = -8\cdot V + s^3 \quad |-s^3$$

$$-s^3 = -8\cdot V \quad |\cdot(-1)$$

$$s^3 = 8\cdot V \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$s_E = 2\cdot\sqrt[3]{V}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Das geht am besten mit der zweiten Ableitung.

$$A'(s) = -\sqrt{3}\cdot 4\cdot V\cdot s^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s$$

$$A''(s) = \sqrt{3}\cdot 8\cdot V\cdot s^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}\cdot 8\cdot V\cdot s^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 8\cdot V}{s^3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A''(s_E) = \frac{\sqrt{3}\cdot 8\cdot V}{\left(2\cdot\sqrt[3]{V}\right)^3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 8\cdot V}{8\cdot V} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad Minimum$$

Wir berechnen jetzt noch die Höhe h_E.

$$h_E = \frac{4\cdot V}{\sqrt{3}\cdot s_E^2}$$

$$= \frac{4\cdot V}{\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\sqrt[3]{V}\right)^2}$$

$$= \frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{V}\right)^3}{\sqrt{3}\cdot 4\cdot\left(\sqrt[3]{V}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{3}}$$

Setzen wir nun noch den vorgegebenen Wert für das Volumen von $V = 8dm^3$ in die

gefundenen Lösungen für s_E und h_E ein.

$$s_E = 2 \cdot \sqrt[3]{V}$$
$$= 2 \cdot \sqrt[3]{8dm^3}$$
$$= 2 \cdot 2dm$$
$$s_E = 4dm$$

$$h_E = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{8dm^3}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2dm}{\sqrt{3}}$$
$$h_E \approx 1{,}1547dm$$

Hier noch einmal die Zusammenfassung der Lösung:

$s_E = 4dm \quad h_E \approx 1{,}1547dm$

Aufgabe 10

In einen halbkreisförmigen Wanddurchbruch soll gemäß nebenstehender Skizze ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fläche A eingebaut werden. Bestimmen Sie die Höhe h und die Breite b des optimalen Fensters, wenn der Bogenradius r bekannt ist.

Lösung:

Die Fensterfläche A soll möglichst groß werden. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = b \cdot h$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Um diese zu erhalten, betrachten wir in der Skizze das kleine rechtwinklige Dreieck unten rechts. Der Satz des Pythagoras ergibt unsere **Nebenbedingung**:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Man kann die Gleichung nach h oder nach b umstellen. Ich stelle sie nach b um, denn

dann erhalte ich <u>keine</u> Brüche.

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad | - h^2$$

$$r^2 - h^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{b}{2} \quad | \cdot 2$$

$$b = 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2}$$

Diesen Term setzen wir nun in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion $A(h)$. Wir setzen sie gleich Null und lösen nach a auf.

$$A = b \cdot h$$

$$A(h) = h \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$A(h) = \sqrt{4h^2(r^2 - h^2)}$$

$$A(h) = \sqrt{4r^2h^2 - 4h^4}$$

$$A(h) = (4r^2h^2 - 4h^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(h) = (8r^2h - 16h^3) \cdot \frac{1}{2}(4r^2h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$A'(h) = \frac{8r^2h - 16h^3}{2 \cdot \sqrt{(4r^2h^2 - 4h^4)}}$$

$$A'(h) = \frac{8r^2h - 16h^3}{4 \cdot \sqrt{(r^2h^2 - h^4)}}$$

$$A'(h) = \frac{2r^2h - 4h^3}{\sqrt{(r^2h^2 - h^4)}}$$

$$0 = \frac{2r^2h_E - 4h_E^3}{\sqrt{(r^2h_E^2 - h_E^4)}} \quad | \cdot \sqrt{(r^2h_E^2 - h_E^4)}$$

$$0 = 2r^2h_E - 4h_E^3$$

$$0 = h_E \cdot (2r^2 - 4h_E^2) \quad \Rightarrow \quad h_{E1} = 0(entfällt)$$

$$0 = 2r^2 - 4h_E^2 \quad | + 4h_E^2$$

$$4h_E^2 = 2r^2 \quad |: 4$$

$$h_E^2 = \frac{r^2}{2} \quad |\sqrt{\ }$$

$$h_{E2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$$

Die negative Lösung $h_{E3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$ entfällt natürlich ebenso, wie die Lösung $h_{E1} = 0$. Es bleibt also nur $h_{E2} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$. Man könnte nun mit der zweiten Ableitung prüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt, diese Ableitung ist jedoch nicht ganz einfach zu bestimmen. Daher wähle ich die alternative Methode, die nur mit der ersten Ableitung auskommt[3].

$$A'(h) = \frac{2r^2h - 4h^3}{\sqrt{(r^2h^2 - h^4)}}$$

$$A'(0{,}5r) = \frac{r^3 - 0{,}5r^3}{\sqrt{(0{,}25r^4 - 0{,}0625r^4)}}$$

$$= \frac{0{,}5r^3}{\sqrt{(0{,}3125r^4)}} > 0$$

$$A'(0{,}8r) = \frac{1{,}6r^3 - 2{,}084r^3}{\sqrt{(0{,}64r^4 - 0{,}4096r^4)}}$$

$$= \frac{-0{,}484r^3}{\sqrt{(0{,}2304r^4)}} < 0$$

Wir haben einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, demnach handelt es sich um ein Maximum.

Die noch fehlende Breite b erhalten wir über die umgestellte Nebenbedingung:

$$b = 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$b_E = 2 \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 \cdot \left(r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2\right)}$$

$$= \sqrt{4r^2 - 2r^2}$$

$$= \sqrt{2r^2}$$

$$b_E = \sqrt{2} \cdot r$$

Fassen wir noch einmal die Lösungen zusammen:

$b_E = \sqrt{2} \cdot r \quad h_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$

[3] Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf

Aufgabe 11

Eine zylinderförmige oben offene Regenwassersammeltonne mit einem Volumen von $V = 200\ Liter$ soll so hergestellt werden, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Welchen Durchmesser d und welche Höhe h muss die Tonne haben?

Lösung:

Der "'Materialverbrauch"' soll optimiert werden. Das ist die Oberfläche der Tonne, also Mantel + Boden. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Die Hauptbedingung enthält 2 Variablen (d und h). Deshalb benötigen wir noch genau eine **Nebenbedingung**. Diese erhalten wir mit Hilfe des bekannten Volumens V:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir müssen die **Nebenbedingung** nach d oder h umstellen und in die **Hauptbedingung** einsetzen. Da sie sich einfacher nach h als nach d umstellen lässt, tun wir das.

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad | \cdot 4$$

$$4V = \pi \cdot d^2 \cdot h \quad |: (\pi \cdot d^2)$$

$$\frac{4V}{\pi \cdot d^2} = h$$

Eingesetzt in die Hauptbedingung erhalten wir A als eine Funktion von d.

$$A(d) = \pi \cdot d \cdot \frac{4V}{\pi \cdot d^2} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$A(d) = \frac{4V}{d} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$A(d) = 4V \cdot d^{-1} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$A'(d) = -4V \cdot d^{-2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d$$

$$A'(d) = -4V \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{2} \cdot d$$

$$A'(d) = -\frac{4V}{d^2} + \frac{\pi}{2} \cdot d$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist, dass die erste Ableitung gleich 0 ist.

$$-\frac{4V}{d_E^2}+\frac{\pi}{2}\cdot d_E=0 \quad |+\frac{4V}{d_E^2}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot d_E=\frac{4V}{d_E^2} \quad |\cdot d_E^2$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot d_E^3=4V \quad |:\frac{\pi}{2}$$

$$d_E^3=\frac{8V}{\pi} \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$d_E=\sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}}$$

$$d_E=2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob der gefundene Wert für d tatsächlich ein Minimum ergibt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$A'(d)=-4V\cdot d^{-2}+\frac{\pi}{2}\cdot d$$

$$A''(d)=8V\cdot d^{-3}+\frac{\pi}{2}$$

$$A''(d_E)=8V\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}}\right)^{-3}+\frac{\pi}{2}$$

$$A''(d_E)=8V\cdot\left(\frac{8V}{\pi}\right)^{-1}+\frac{\pi}{2}$$

$$A''(d_E)=8V\cdot\frac{\pi}{8V}+\frac{\pi}{2}$$

$$A''(d_E)=\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$A''(d_E)=\frac{3\cdot\pi}{2}>0 \quad \Rightarrow \quad Tiefpunkt$$

Zuletzt muss noch h_E bestimmt werden. Das geschieht am einfachsten durch Einsetzen von d_E in die umgestellte Nebenbedingung am Anfang.

$$h=\frac{4V}{\pi\cdot d^2}$$

$$h_E=\frac{4V}{\pi\cdot d_E^2}$$

$$h_E=\frac{4V}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}}\right)^2}$$

$$h_E = \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{8^2V^2}{\pi^2}}}$$

$$h_E = \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 8^2V^2}{\pi^2}}}$$

$$h_E = \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 8^2V^2}}$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{4^3V^3}{\pi \cdot 8^2V^2}}$$

$$h_E = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Bei der optimalen Tonne ist also die Höhe halb so groß wie der Durchmesser.

$$d_E = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \quad h_E = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Zum Schluss können wir noch das gegebene Volumen von 200 Litern in die Formeln einsetzen und erhalten die Zahlenwerte für Durchmesser und Höhe in Dezimetern.

$$d_E \approx 7{,}9859dm \quad h_E \approx 3{,}9929dm$$

<u>Aufgabe 12</u>

Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von $500m^3$ soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei schlagen die Wände mit 1000 je m^2, die Decke mit 600 je m^2 sowie der Boden mit 400 je m^2 zu Buche. Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

Lösung:

Zunächst müssen Variablennamen festgelegt werden, da sie nicht vorgegeben sind. Wir benennen die Seitenlänge des quadratischen Grundrisses mit a und die Höhe des Lagers mit h.

Optimiert werden sollen die Kosten, die wir mit K bezeichnen. Sie liefern also unsere **<u>Hauptbedingung</u>**:

$$K = \underbrace{4 \cdot a \cdot h \cdot 1000}_{Wände} + \underbrace{a^2 \cdot 600}_{Decke} + \underbrace{a^2 \cdot 400}_{Boden}$$

Da in der Hauptbedingung zwei Variablen vorkommen (a und h), benötigen wir noch eine **<u>Nebenbedingung</u>**. Diese bekommen wir mit Hilfe des bekannten Gesamtvolumes von $V = 500m^3$:

$$V = a^2 \cdot h$$

Da sich die Nebenbedingung einfacher nach h als nach a umstellen lässt, wählen wir diesen Weg.

$$V = a^2 \cdot h \quad |: a^2$$

$$\frac{V}{a^2} = h$$

$$h = \frac{500m^3}{a^2}$$

Wir setzen die umgeformte Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion $K(a)$. Diese Funktion wird zunächst vereinfacht und dann abgeleitet. Die Ableitung setzen wir gleich Null und lösen die Gleichung nach a auf.

$$K = 4 \cdot a \cdot h \cdot 1000 + a^2 \cdot 600 + a^2 \cdot 400$$

$$K(a) = 4 \cdot a \cdot \frac{500m^3}{a^2} \cdot 1000 + a^2 \cdot 600 + a^2 \cdot 400$$

$$= \frac{2000000m^3}{a} + a^2 \cdot 1000$$

$$K(a) = 2000000m^3 \cdot a^{-1} + a^2 \cdot 1000$$

$$K'(a) = -2000000m^3 \cdot a^{-2} + a \cdot 2000$$

$$= -\frac{2000000m^3}{a^2} + a \cdot 2000$$

$$0 = -\frac{2000000m^3}{a_E^2} + a_E \cdot 2000 \quad |: 2000$$

$$0 = -\frac{1000m^3}{a_E^2} + a_E \quad | + \frac{1000m^3}{a_E^2}$$

$$\frac{1000m^3}{a_E^2} = a_E \quad | \cdot a_E^2$$

$$1000m^3 = a_E^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$a_E = 10m$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Diese Prüfung führen wir mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$K'(a) = -2000000m^3 \cdot a^{-2} + a \cdot 2000$$

$$K''(a) = 2 \cdot 2000000m^3 \cdot a^{-3} + 2000$$

$$= \frac{4000000m^3}{a^3} + 2000$$

$$K''(a_E) = \frac{4000000m^3}{1000m^3} + 2000$$

$$= 4000 + 2000$$

$$K''(a_E) = 6000 > 0 \quad \Rightarrow \quad Minimum$$

Zum Schluss bestimmen wir noch die Höhe h_E mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung.

$$h_E = \frac{500m^3}{a^2} = \frac{500m^3}{(10m)^2} = 5m$$

Zusammengefasst: $a_E = 10m \quad h_E = 5m$

<u>Aufgabe 13</u>

Aus einem runden Baumstamm mit einem Durchmesser von $d = 60cm$ soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und einem möglichst großen Widerstandsmoment geschnitten werden. Das Widerstandsmoment kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Bestimmen Sie die Höhe h und die Breite b des günstigsten rechteckigen Querschnitts!

Lösung:

Das *Widerstandsmoment* W soll optimiert werden. Die zugehörige Formel stellt somit die **<u>Hauptbedingung</u>** dar:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Zeichnet man in der Skizze des Stammes den Durchmesser d als Diagonale im Rechteck ein, dann erkennt man sofort ein rechtwinkliges Dreieck mit d als Hypotenuse und b und h als Katheten. Der Satz des Pythagoras stellt einen Zusammenhang zwischen diesen drei Größen dar. Er kann somit die gesuchte **<u>Nebenbedingung</u>** liefern:

$$d^2 = b^2 + h^2$$

Wir können diese Nebenbedingung nach b oder h auflösen; in beiden Fällen erhalten wir eine Wurzel. Da in der Hauptbedingung jedoch h nur im Quadrat auftaucht, bietet es sich an, die Nebenbedingung nach h^2 umzustellen und das Ergebnis direkt für h^2 in die Hauptbedingung einzusetzen.

$$d^2 = b^2 + h^2 \quad | - b^2$$

$$d^2 - b^2 = h^2$$

Diesen Term setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion $W(b)$. Diese wird dann nach b abgeleitet und gleich Null gesetzt.

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W(b) = \frac{b \cdot (d^2 - b^2)}{6}$$

$$W(b) = \frac{d^2 \cdot b - b^3}{6}$$

$$W'(b) = \frac{d^2 - 3b^2}{6}$$

$$0 = \frac{d^2 - 3b^2}{6} \quad | \cdot 6$$

$$0 = d^2 - 3b^2 \quad | + 3b^2$$

$$3b^2 = d^2 \quad |: 3$$

$$b^2 = \frac{1}{3} \cdot d^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$b_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d$$

Der negative Wert $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d$ entfällt. Für $b_E = b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d$ muss nun geprüft werden, ob – wie gewünscht – ein Maximum vorliegt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$W'(b) = \frac{d^2 - 3b^2}{6}$$

$$W''(b) = \frac{-6b}{6}$$

$$W''(b) = -b$$

$$W''(b_E) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d\right)$$

Weil $d > 0$ ist, folgt:

$$W''(b_E) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

Bestimmen wir nun noch die Höhe h mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung.

$$h^2 = d^2 - b^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} \quad |b_E einsetzen$$

$$h_E = \sqrt{d^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d\right)^2}$$

$$= \sqrt{d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot d^2}$$

$$h_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$$

Setzt man nun noch den gegebenen Wert von $d = 60cm$ in die Lösungen für b_E und h_E ein, erhalten wir:

$$b_E \approx 34{,}64cm \quad h_E \approx 48{,}99cm$$