Aufgabe 1

Ein Glasgefäß hat am Boden einen Durchmesser von 2 cm. Seine breiteste Stelle liegt in 1 cm Höhe und beträgt 4 cm. Das Gefäß ist insgesamt 2 cm hoch und oben geschlossen.

Seine Randfunktion kann durch eine Funktion 3. Grades modelliert werden.

Es ergeben sich hieraus die Punkte A(0/1), B(1/2), C(2/0).

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wegen der breitesten Stelle liegt ein Extremum vor, also muss mit $f'(x)$ gearbeitet werden.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I: $f(0) = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1$

II: $f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 2 \rightarrow a + b + c + d = 2$

III: $f(2) = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 0 \rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$

IV: $f'(1) = 3\cdot a\cdot 1^2 + 2\cdot b\cdot 1 + c\cdot 1 = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

I: $8a + 4b + 2c + 1d = 0$ | $\cdot$ 1 | $\cdot$ (– 3)

II: $1a + 1b + 1c + 1d = 2$ | $\cdot$ (– 8)

III: $3a + 2b + 1c = 0$ | $\cdot$ 8

IV: $1d = 1$

I: $8a + 4b + 2c + 1d = 0$

II: $– 4b – 6c – 7d = – 16$

III: $4b + 2c – 3d = 0$

IV: $1d = 0$

I: $8a + 4b + 2c + 1d = 0$

II: $– 4b – 6c – 7d = – 16$

III: $– 4c – 10d = – 16$

IV: $1d = 0$

----

d in III: $– 4c – 10 \cdot 1 = – 16$ …. $c = 1,5$

d und c in II: $– 4b – 6\cdot 1,5 – 7\cdot 1 = – 16$ ……$b = 0$

d, c und b in I: $8a + 4\cdot 0 + 2\cdot 1,5 + 1\cdot 1 = 0$ ….. $a = – 0,5$

$f(x) = – 0,5x^3 + 1,5x + 1$

Das Integrationsintervall ist [0, 2]

$V = \pi \bullet \int_0^2 f(x)^2 \, dx$

$= \pi \bullet \int_0^2 (-\ 0{,}5x^3 + 1{,}5x + 1)^2 \, dx$

$= \pi \bullet \int_0^2 (0{,}25x^6 - 1{,}5x^4 - x^3 + 2{,}25x^2 + 3x + 1) \, dx$

$= \pi \bullet [\frac{0{,}25x^7}{7} - \frac{1{,}5x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2{,}25x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 1x]_0^2$

$= \pi \bullet [\frac{0{,}25 \bullet 2^7}{7} - \frac{1{,}5 \bullet 2^5}{5} - \frac{2^4}{4} + \frac{2{,}25 \bullet 2^3}{3} + \frac{3 \bullet 2^2}{2} + 1 \bullet 2]$

$= \pi \bullet (\frac{32}{7} - \frac{48}{5} - \frac{16}{4} + \frac{18}{3} + \frac{12}{2} + 2)$

$= \frac{174}{35} \pi \text{ cm}^3$

Aufgabe 2

Die Randkurve eines Schmuckstücks kann durch eine quadratische Funktion dargestellt werden.

Es hat bei 2 cm Höhe seine breiteste Stelle, mit einem Durchmesser von 2 cm und ist 4 cm hoch.

Es ergeben sich hieraus die Punkte A(4/0), B(2/1)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Wegen der breitesten Stelle liegt ein Extremum vor, also muss mit f'(x) gearbeitet werden.

$f'(x) = 2ax + b$

I : $f(4) = a \bullet 4^2 + b \bullet 4 + c = 0 \rightarrow 16a + 4b + 1c = 0$

II: $f(2) = a \bullet 2^2 + b \bullet 2 + c = 1 \rightarrow 4a + 2b + 1c = 1$

III: $f'(2) = 2 \bullet a \bullet 2 + 1b = 0 \rightarrow 4a + 1b = 0$

I: $16a + 4b + 1c = 0$

II: $4a + 2b + 1c = 1 \quad | \bullet (-4)$

III: $4a + 1b = 0 \quad | \bullet (-4)$

I: $16a + 4b + 1c = 0$

II: $-4b - 3c = -4$

III: $1c = 0$

----

c in II: $-4b - 3 \bullet 0 = -4$ …. b = 1

c und b in I: $16a + 4 \bullet 1 + 1 \bullet 0 = 0$ ….. a = – 0,25

$f(x) = -0{,}25x^2 + x$

Das Integrationsintervall ist [0, 4]

$$V = \pi \bullet \int_0^4 f(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \bullet \int_0^4 (-\ 0{,}25x^2 + x)^2 \, dx$$

$$= \pi \bullet \int_0^4 (0{,}0625x^4 - 2 \bullet 0{,}25x^2 \bullet x + x^2) \, dx$$

$$= \pi \bullet \int_0^4 (0{,}0625x^4 - 0{,}5x^3 + x^2) \, dx$$

$$= \pi \bullet \left[\frac{0{,}0625x^5}{5} - \frac{0{,}5x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \pi \bullet \left(\frac{0{,}0625 \bullet 4^5}{5} - \frac{0{,}5 \bullet 4^4}{4} + \frac{4^3}{3}\right)$$

$$= \pi \bullet \left(\frac{64}{5} - \frac{128}{4} + \frac{64}{3}\right)$$

$$= \frac{32}{15} \pi \ cm^3$$