

Manchmal soll irgendeine technische Größe optimiert werden. Hier kann die Differentialrechnung mit Erfolg eingesetzt werden. Aber nicht nur in der Technik gibt es solche Probleme, auch in der Wirtschaft und vielen anderen Bereichen werden oft Optimierungen angestrebt. Hier einige Beispiele:

- Ein Behälter soll aus möglichst wenig Material hergestellt werden.
- Ein Bauteil soll möglichst stabil sein.
- Die Geschwindigkeit eines flussaufwärts fahrenden Rheinschiffes soll auf einen möglichst kleinen Kraftstoffverbrauch eingestellt werden.
- Bei welchem Aussteuerungsgrad wird die Endstufe einer Stereo-Anlage am heißesten? Danach wird dann der Kühlkörper bemessen.
- Bei welchem Einfallswinkel wird das Licht in einem Regentropfen am wenigsten gebrochen? Das Ergebnis zeigt sich in der Position des Regenbogens.

Die Idee ist folgende: Kann man eine Funktion aufstellen, die die zu optimierende Größe als Funktionswert liefert, dann muss man nur ein Minimum oder ein Maximum dieser Funktion suchen. Dies geschieht nach dem bekannten Verfahren, indem man nämlich die Funktion ableitet und gleich Null setzt. Danach muss man prüfen, ob die gefundenen Kandidaten Minima oder Maxima darstellen.

Ich möchte die Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel darstellen. Dabei wird die allgemeine Vorgehensweise neben dem Beispiel dargestellt.

Beispiel: Ein Schäfer will mit 100 m Maschendraht für einen Zaun ein rechteckiges Feld für seine Schafe begrenzen, so dass die Fläche darin möglichst groß wird. Welche Länge l und Breite b muss das Rechteck erhalten?

Vorgehensweise:

Schritt 1:

Man stellt eine Funktionsgleichung (die sogenannte **Hauptbedingung**) auf, die als Ergebnis die zu **optimierende Größe** liefert. Dabei kommt zunächst meist mehr als eine Variable vor.

*(Der häufigste Fehler beim Lösen von Extremwertaufgaben liegt übrigens darin, dass **nicht** die zu optimierende Größe als Hauptbedingung verwendet wird!)*

Beispiel:

Schritt 1:

Die zu optimierende Größe ist die Fläche **A**. Mit den beiden Variablen **l** und **b** für die Länge und Breite des Rechteckes ergibt sich: $A = l \cdot b$

Schritt 2:

Man stellt eine Beziehung (eine sogenannte **Nebenbedingung**) zwischen den Variablen auf und stellt diese nach einer beliebigen Variablen um. Bei drei Variablen sind zwei Nebenbedingungen erforderlich, bei vier Variablen drei Nebenbedingungen, usw. Hat man keine Idee, woraus man die Nebenbedingung(en) erstellen kann, schaut man nach, welche Angaben in der Aufgabenstellung noch nicht ausgenutzt worden sind.

Schritt 2:

Bekannt ist der Umfang des Rechteckes, die Gesamtlänge des Zaunes. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 100m \\ \Leftrightarrow 2l &= 100m - 2b \\ \Leftrightarrow l &= 50m - b \end{aligned}$$

Schritt 3:

Die umgestellte(n) Nebenbedingung(en) wird (werden) in die Funktionsgleichung – die Hauptbedingung – eingesetzt. Man erhält eine Funktion von nur noch einer Variablen.

Schritt 3:

Einsetzen von l in die Hauptbedingung ergibt:

$$A = (50m - b) \cdot b$$

Die Fläche **A** als Funktion der Breite **b** lautet dann:

$$\begin{aligned} A(b) &= (50m - b) \cdot b \\ \Leftrightarrow A(b) &= 50m \cdot b - b^2 \end{aligned}$$

Schritt 4:

Die Funktion wird nach der verbliebenen Variablen abgeleitet und gleich Null gesetzt, um Kandidaten für einen Extremwert zu erhalten.

Schritt 4:

$$\begin{aligned} A'(b) &= 50m - 2b \\ \Rightarrow 0 &= 50m - 2b_E \\ \Leftrightarrow 2b_E &= 50m \\ \Leftrightarrow b_E &= 25m \end{aligned}$$

Schritt 5:

Mit Hilfe der zweiten Ableitung (oder einem anderen Verfahren) wird geprüft, ob entsprechend der Aufgabenstellung ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Schritt 5:

$$\begin{aligned} A''(b) &= -2 < 0 \\ \Rightarrow \text{Maximum bei } b_E &= 25m \end{aligned}$$

Schritt 6:

Die restlichen Größen laut Aufgabenstellung werden bestimmt.
(In der Praxis werden hier oft Punkte verschenkt, weil man froh ist, die eigentliche Aufgabe gelöst zu haben und daher diesen Teil übersieht.)

Schritt 6:

Alle Seitenlängen des Rechteckes sind gesucht, es fehlt also noch die Länge l_E . Ich verwende zur Berechnung die entsprechend umgestellte Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} l &= 50m - b \\ \Rightarrow l_E &= 50m - 25m = 25m \end{aligned}$$