Ganzzahlige Dimension

Unter dem Begriff Dimension versteht man die Ausdehnung in eine Richtung. Der Begriff Dimension geht auf die euklidische Geometrie zurück und bedeutet so viel wie Anzahl der Ausdehnungen.

Ein Punkt hat die Dimension 0

Eine Gerade hat die Dimension 1 → Länge

Eine Fläche hat die Dimension 2 → Länge und Breite

Ein Raum hat die Dimension 3 → Länge, Breite und Höhe

Gebrochene Dimensionen

Benoît B. Mandelbrot führte neben den ganzzahligen Dimensionen auch gebrochenzahlige, sogenannte fraktale Dimensionen ein.

Fraktale

Fraktale werden aus nichtlinearen Gleichungen generiert und entstehen durch Rekursion. Sie zeichnen sich durch Selbstähnlichkeit aus. In der fraktalen Geometrie untersucht man, ob für individuelle Punkte der Gaußebene, eine nichtlineare rekursive Gleichung gegen einen Grenzwert oder gegen unendlich konvergiert (=sich diesem Wert kontinuierlich annähert, ihn aber nie erreicht) oder ob sie divergiert (=zwischen mehreren Werten hin und herspringt, also keinen Grenzwert besitzt).

Die zugrunde liegende Rekursion lautet: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, mit $z_n, c \in \mathbb{C}$

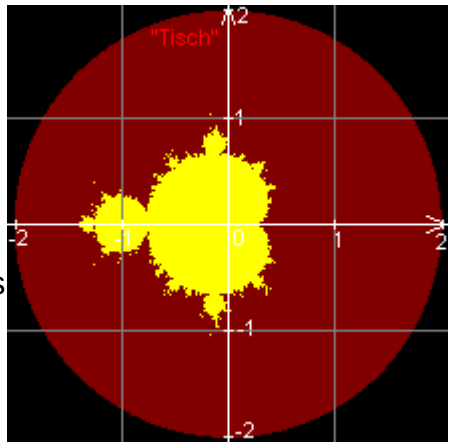
Zwei besonders bekannte Beispiele für Fraktale sind die Mandelbrot-Menge und die Julia-Menge die auf der gleichen quadratischen Gleichung basieren. [1]

Wie kann man sich die Mandelbrotmenge nun vorstellen?

Setzt man innerhalb der Gauß'schen Zahlenebene einen Floh (Position z_1, im Beispiel -0,5 + 0,5i) auf einen runden Tisch (Radius 2, Mittelpunkt im Ursprung), merkt er sich zunächst seine relative Position zum Ursprung (c). Mit jedem Schritt n springt der Floh (Pos. z_n) so, dass sein Abstand vom Ursprung das Quadrat des alten Abstands ist, und sich der Winkel, den Floh, Ursprung und X-Achse bilden, verdoppelt (z_n^2). Anschließend springt er zur Seite, und zwar um die gemerkte Position (c) relativ zum jetzigen Standpunkt ($z_n^2 + c$).

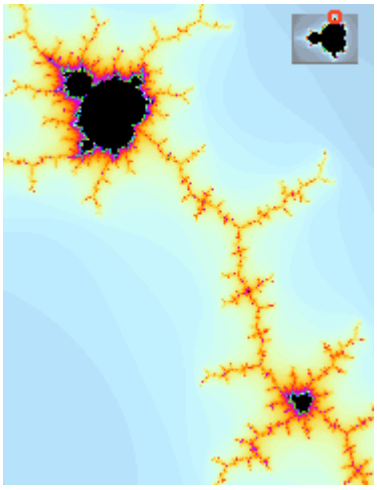
[1] https://www.maths2mind.com/algebra/komplexe-zahlen/schoenheit-fraktale-selbstaehnlichkeit

Setzt man nun Flöhe an verschiedenen Stellen auf dem Tisch aus, fallen viele nach einem oder mehreren (endlich vielen) Schritten vom Tisch, und einige bleiben beim Springen **immer** auf dem Tisch.



Färbt man nun alle Punkte gelb ein, von denen man aus Flöhe aussetzen kann, die immer auf dem Tisch bleiben, ergibt sich das Muster, was rechts zu sehen ist.

Die Menge aller gefärbten Punkte (bzw. der markierten komplexen Zahlen) stellt die wohl komplizierteste Menge der Mathematik dar, was sich hier am ungleichmäßen Umriss andeutet. Sie hat dafür sogar einen Eintrag im Guiness Buch der Rekorde bekommen. Man spricht deswegen oft von der Mandelbrot-Menge statt vom Mandelbrot-Fraktal.
Für die, die es etwas formaler wollen: Als Mandelbrot-Menge bezeichnet man die Menge aller komplexen Zahlen c, für die die komplexe Iteration $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $z_0 = 0$ beschränkt ist. Mit $z_0 = 0$ ergibt sich $z_1 = c$, wie es im Floh-Beispiel erklärt ist. Bei dieser Iteration ist es so, dass sie bereits dann nicht beschränkt ist, wenn ein Element einen Betrag von mehr als 2 erreicht, also im Floh-Beispiel der entsprechende Floh vom Tisch fällt. [2]
Eine Vorstellung von der Komplexität und Schönheit der Menge bekommt man vor allem, wenn man einzelne Bereiche der Menge vergrößert. Eine Kostprobe:



Zoom 1:30

Zoom 1:230

Zwei Ausschnitte des Mandelbrot-Fraktals

[2] https://staff.fim.uni-passau.de/~zumbraegel/fractals/fracmand.html

Berechnung komplexer Zahlen mit Excel

Mit dem Befehl =IMSUMME(A1; B1) werden die beiden komplexen Zahlen in den Zellen A1 und B1 addiert.
Mit dem Befehl =IMPRODUKT(A1; B1) werden die beiden komplexen Zahlen in den Zellen A1 und B1 addiert.

RE{c}	0,1	IM{c}	0,3
z0	0		
n	zn	zn²	zn²+c
0	0	0	0,1+0,3i
1	0,1+0,3i	-0,08+0,06i	0,02+0,36i
2	=D5	=IMPRODUKT(B6;B6)	=IMSUMME(C6;F1)

c= **0,1+0,3i**

„Spielt“ man jetzt mit dem Parameter c, so sieht man, dass eine kleine Veränderung des Parameters große Veränderungen im Ergebnis mit sich ziehen.

Für c = 0,1+ 0,3i konvergieren die z_n.

RE{c}	0,1	IM{c}	0,3
z0	0		
n	zn	zn²	zn²+c
0	0	0	0,1+0,3i
1	0,1+0,3i	-0,08+0,06i	0,02+0,36i
2	0,02+0,36i	-0,1292+0,0144i	-0,0292+0,3144i
3	-0,0292+0,3144i	-0,09799472-0,01836096i	0,00200528000000001+0,28163904i
4	0,00200528000000001+0,28163904i	-0,0793165277042432+0,00112953026826241i	0,0206834722957568+0,301129530268262i
5	0,0206834722957568+0,301129530268262i	-0,0902511879733748+0,0124568085934757i	0,00974881202662521+0,312456808593476i
6	0,00974881202662521+0,312456808593476i	-0,0975342179004896+0,00609216538683402i	0,0024657820995104+0,306092165386834i
7	0,0024657820995104+0,306092165386834i	-0,0936863336298387+0,00150951316442246i	0,0063136663701613+0,301509513164422i
8	0,0063136663701613+0,301509513164422i	-0,090868124145613+0,00380726094709983i	0,009131875854387+0,3038072609471i
9	0,009131875854387+0,3038072609471i	-0,0922154606475594+0,00554866038126055i	0,00778453935244061+0,305548660381261i
10	0,00778453935244061+0,305548660381261i	-0,0932993848078535+0,00475711114164687i	0,0067006151921465+0,304757111141647i
11	0,0067006151921465+0,304757111141647i	-0,092831998547449+0,0040841202576608i	0,007168001452551+0,304084120257661i
12	0,007168001452551+0,304084120257661i	-0,0924157719480519+0,00435935083140921i	0,00758422805194811+0,304359350831409i
13	0,00758422805194811+0,304359350831409i	-0,0925770939233728+0,00461666145289658i	0,00742290607662721+0,304616661452897i
14	0,00742290607662721+0,304616661452897i	-0,0927362109000864+0,00452228173468121i	0,00726378909991361+0,304522281734681i
15	0,00726378909991361+0,304522281734681i	-0,0926810574408084+0,00442397126149039i	0,0073189425591916+0,30442397126149i
16	0,0073189425591916+0,30442397126149i	-0,0926203873584317+0,00445612311860768i	0,00737961264156831+0,304456123118608i
17	0,00737961264156831+0,304456123118608i	-0,0926390722216734+0,00449353650993791i	0,0073609277783266+0,304493536509938i
18	0,0073609277783266+0,304493536509938i	-0,0926621305185712+0,00448270986243381i	0,00733786948142881+0,304482709862434i
19	0,00733786948142881+0,304482709862434i	-0,0926558762766447+0,00446850876864459i	0,0073441237233553+0,304468508768645i
20	0,0073441237233553+0,304468508768645i	-0,0926471366785385+0,00447210879652483i	0,00735286332146151+0,304472108796525i

C=0,1+0,3i

Für c = 0,5 + 0,3 i divergieren sie.

RE{c}	0,5	IM{c}	0,3
z0	0		
n	zn	zn²	zn²+c
0	0	0	0,5+0,3i
1	0,5+0,3i	0,16+0,3i	0,66+0,6i
2	0,66+0,6i	0,0756000000000001+0,792i	0,5756+1,092i
3	0,5756+1,092i	-0,86114864+1,2571104i	-0,36114864+1,5571104i
4	-0,36114864+1,5571104i	-2,29416445761431-1,12469660657971i	-1,79416445761431-0,82469660657971i
5	-1,79416445761431-0,82469660657971i	2,53890160806236+2,9592826796809i	3,03890160806236+3,2592826796809i
6	3,03890160806236+3,2592826796809i	-1,38800060258391+19,8092787528242i	-0,88800060258391+20,1092787528242i
7	-0,88800060258391+20,1092787528242i	-403,594546888597-35,7141033000714i	-403,094546888597-35,4141033000714i
8	-403,094546888597-35,4141033000714i	161231,055018775+28550,4638464165i	161231,555018775+28550,7638464165i
9	161231,555018775+28550,7638464165i	25180468217,5584+9206568103,86311i	25180468218,0584+9206568104,16311i
10	25180468218,0584+9206568104,16311i	549295083424056000000+463651391088539000000i	549295083424056000000+463651391088539000000i
11	549295083424056000000+463651391088539000000i	8,67524762155033E+40+5,09362859095317E+41i	8,67524762155033E+40+5,09362859095317E+41i
12	8,67524762155033E+40+5,09362859095317E+41i	-2,51924530096234E+83+8,83769786374545E+82i	-2,51924530096234E+83+8,83769786374545E+82i
13	-2,51924530096234E+83+8,83769786374545E+82i	5,56554785111232E+166-4,45286576291313E+166i	5,56554785111232E+166-4,45286576291313E+166i
14	5,56554785111232E+166-4,45286576291313E+166i	#WERT!	#WERT!
15	#WERT!	#WERT!	#WERT!
16	#WERT!	#WERT!	#WERT!
17	#WERT!	#WERT!	#WERT!
18	#WERT!	#WERT!	#WERT!
19	#WERT!	#WERT!	#WERT!
20	#WERT!	#WERT!	#WERT!

Definition der Mandelbrotmenge

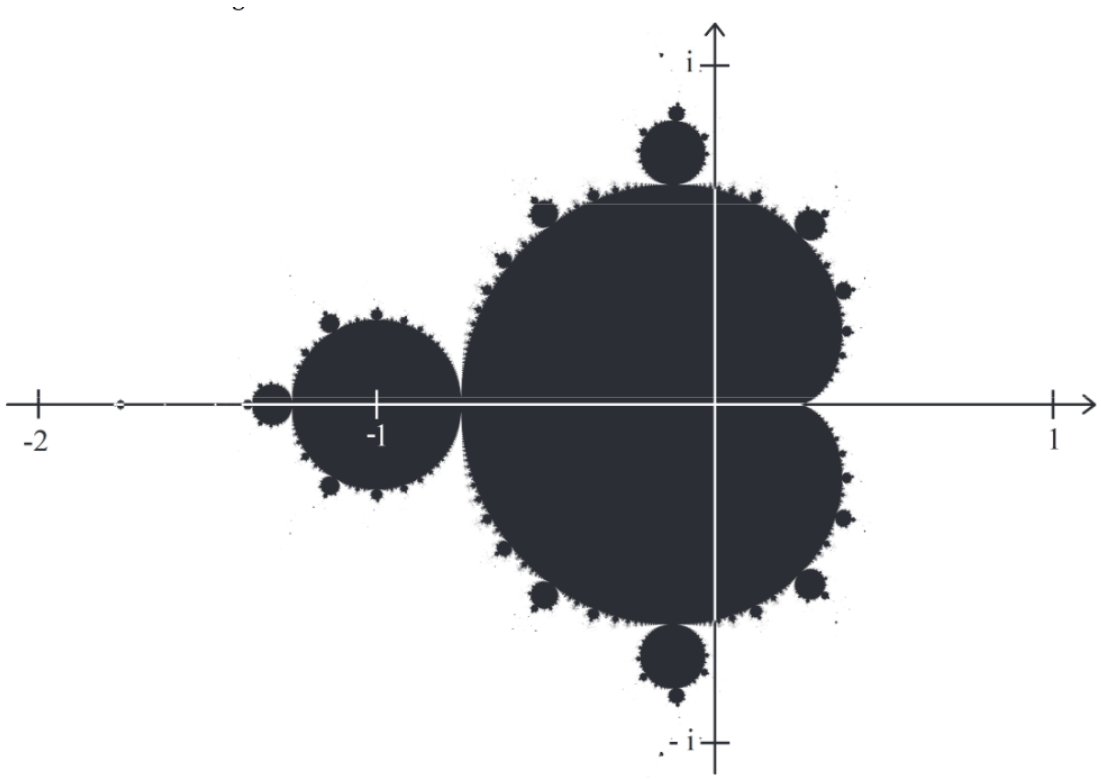
Die Menge aller komplexen Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für welche die Folge $z_0 = 0$ und $z_{n+1} = z_n^2 + c$ beschränkt ist, nennt man Mandelbrot-Menge.

Sie ist nach dem französisch-amerikanischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924 – 2010) benannt.[3]

[3] https://epub.uni-bayreuth.de/4591/1/Komplexe_Zahlen.pdf

Das „Apfelmännchen“

Zeichnet man nun die Ergebnisse der konvergierenden Folge in die Gaußsche Zahlenebene ein, so ergibt sich die Darstellung der Mandelbrotmenge. Diese wird aufgrund ihrer Form auch als Apfelmännchen bezeichnet.



Selbstähnlichkeit

Von Selbstähnlichkeit ist die Rede, wenn bei unendlicher Vergrößerung immer wieder die ursprüngliche Gestalt zu sehen ist. Beispiele dafür sind das Sierpinski-Dreieck, die Cantor-Menge, die Koch-Kurve, Juliamengen und eben die Mandelbrotmenge.