Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine geordnete Liste von n Zahlen. Die Anzahl n dieser Zahlen wird als Dimension des Vektors bezeichnet.

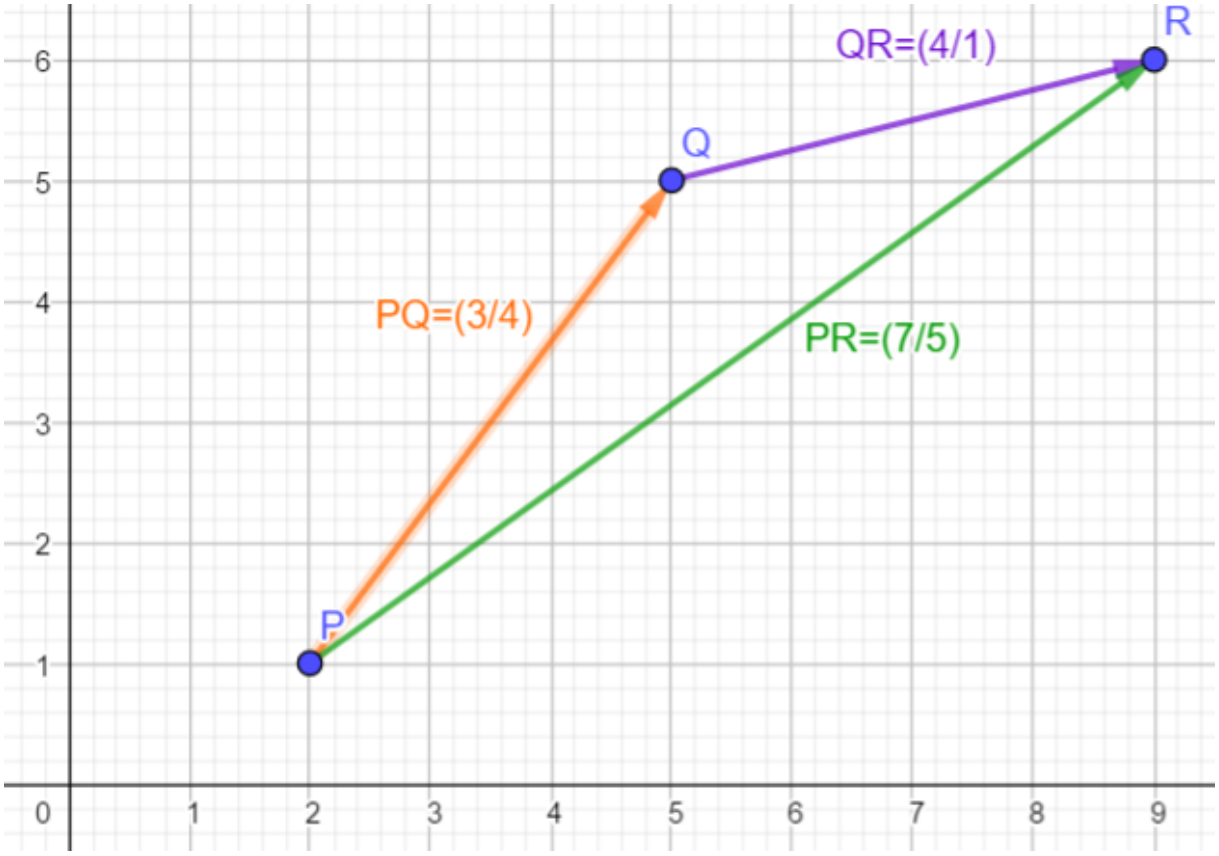
Schreibweise: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

Wir schauen uns nachfolgend an wie man mit Vektoren rechnen kann.

Seien z. B. $\overrightarrow{PQ} = \binom{3}{4}$ und $\overrightarrow{QR} = \binom{4}{1}$, dann berechnet man die Summe wie folgt:

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \binom{3}{4} + \binom{4}{1} = \binom{3 + 4}{4 + 1} = \binom{7}{5}$.

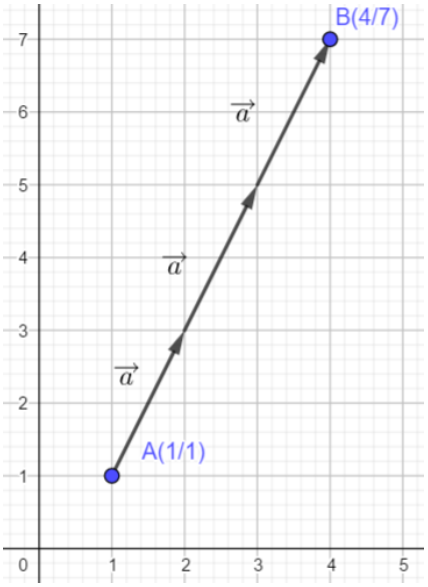
Graphisch kann man sich das als Aneinandersetzen der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ vorstellen.



Man geht von P aus 3 Schritte nach rechts und 4 Schritte hoch und ist bei Punkt Q. Von dort aus geht man 4 Schritte nach rechts und 1 Schritt hoch. Um von P direkt zu R zu kommen, könnte man von P aus 7 Schritte nach rechts und 5 Schritte hoch gehen.

Allgemein gilt für die Addition von Vektoren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

Auch die sogenannte Skalarmultiplikation kann man sich graphisch veranschaulichen. So bedeutet 3 • $\binom{1}{2}$ nichts anderes als dass man den Vektor $\vec{a} = \binom{1}{2}$ dreimal hintereinander ausführt.



Angenommen man beginnt bei A(1/1) und geht dann 2 Schritt nach rechts und 2 Schritte hoch und wiederholt das dreimal, dann endet man bei B(4/7).

Bedeutet doch 3 • $\vec{a}$ nichts anderes als $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$.

Somit ist 3 • $\binom{1}{2} = \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{2} = \binom{3 \bullet 1}{3 \bullet 2} = \binom{3}{6}$.

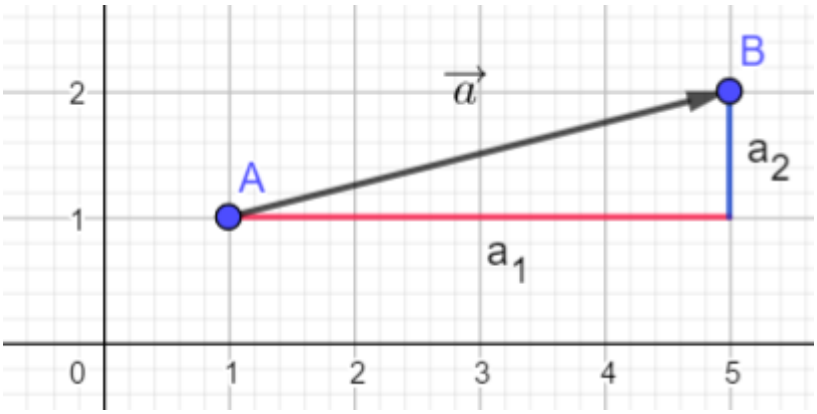
Allgemein: s • $\binom{a_1}{a_2} = \binom{s \bullet a_1}{s \bullet a_2}$

„Normale“ reelle Zahlen nennt man im Zusammenhang mit Vektoren Skalare. Sie werden dann meist mit griechischen Buchstaben wie λ, μ und v bezeichnet.

Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \bullet a_1 \\ \lambda \bullet a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \bullet a_n \end{pmatrix}$

Beispiel: 3 • $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \bullet 3 \\ 3 \bullet 7 \\ 3 \bullet (-6) \\ 3 \bullet 9 \\ 3 \bullet (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ -18 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix}$

Entfernungen lassen sich mithilfe von Vektoren einfach bestimmen. Sie entsricht genau der Länge des Pfeils, welcher beide Punkte verbindet. Abgeleitet von der Darstellung eines Vektors als Pfeil ist der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors definiert. Der Betrag beschreibt also Länge eines Vektors.



Der Vektor $\vec{a}$ ist die Hypotenuse im virtuellen Dreieck. Die Katheten sind hier a_1 und a_2. Die Länge des Vektors berechnet man also mithilfe des Satzes von Pythagoras. Es gilt somit:

$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ | radizieren

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Im obigen Beispiel ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

Allgemein: Betrag von $\vec{a}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ → $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Als Sonderfall ist noch das Vektorprodukt definiert. Manchmal wird es auch Kreuzprodukt genannt.

Vektorprodukt: : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \bullet b_3 - a_3 \bullet b_2 \\ a_3 \bullet b_1 - a_1 \bullet b_3 \\ a_1 \bullet b_2 - a_2 \bullet b_1 \end{pmatrix}$

Eine andere bemerkenswerte Eigenschaft des Kreuzproduktes findet sich als geometrische Deutung. Betrachten wir die Ebene, die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen. Ergänzt man die Pfeile zu einem Parallelogramm, wie nebenstehend dargestellt, dann ist der Betrag des Kreuzproduktes gleich der gelb dargestellten Fläche dieses Parallelogramms in dieser Ebene.

Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt somit: A = $|\vec{a}\ x\ \vec{b}|$

$r_1 \cdot \vec{a_1} + r_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots . r_n \cdot \vec{a_n}$, mit n ∈ ℕ, nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.
Die reellen Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ heißen Koeffizienten.

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und relle Zahlen r,s gelten folgende Rechengesetze:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Addition des neutralen Elements
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz eines Inversen: $-\vec{a}$
$r \bullet (s \bullet \vec{a}) = (r \bullet s) \bullet \vec{a}$	
$r \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = r \bullet \vec{a} + r \bullet \vec{b}$	Distributivgesetz
$(r + s) \bullet \vec{a} = r \bullet \vec{a} + s \bullet \vec{a}$	Distributivgesetz

Alle genannten Regeln gelten auch für Vektoren im Raum, die dreimensionalen Vektoren.

Sie gelten sogar für n – dimensionale Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.