Vektorrechnung

© Sascha Hunsicker

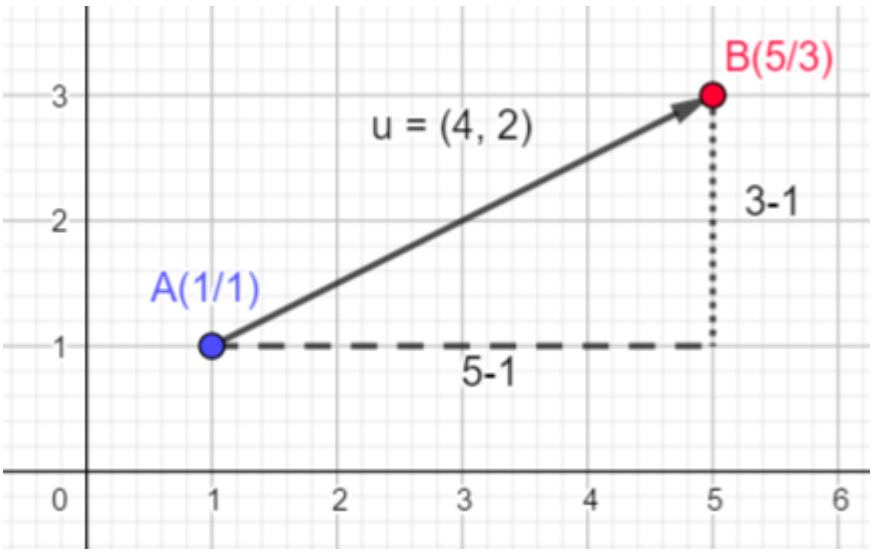
April 2020

Inhalt

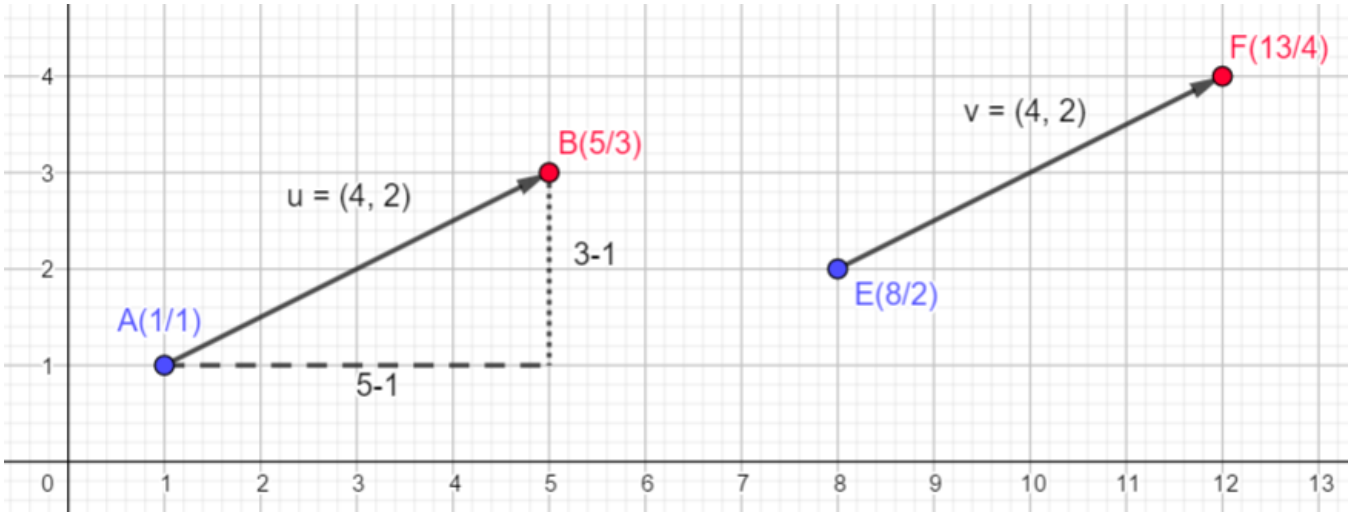
1. Punkte in der Ebene 2
1.1. Aufgaben 4
2. Rechnen mit Vektoren 4
2.1. Aufgaben 8
3. Länge und Mittelpunkt einer Strecke 9
3.1. Aufgaben 10
4. Spiegelung eines Punktes 10
4.1. Aufgaben 11
5. Orthogonale Vektoren 11
5.1. Aufgaben 12
6. Lineare Abhängigkeit 12
6.1. Aufgaben 14
7. Lösungen 14
7.1. Lösungen zu 1.1. 14
7.2. Lösungen zu 2.1. 15
7.3. Lösungen zu 3.1. 19
7.4. Lösungen zu 4.1. 19
7.5. Lösungen zu 5.1. 20
7.6. Lösungen zu 6.1. 20

1. <u>Punkte in der Ebene</u>

Möchte man einen Punkt in der Ebene verschieben, so muss man angeben um wie viele Einheiten er in x – bzw. in y – Richtung verschoben werden soll.
Verschiebt man z. B. den Punkt A(1/1) um 4 Schritte in x – Richtung und dann um 2 Schritte in y – Richtung, dann erhält man den Punkt B(5/3).



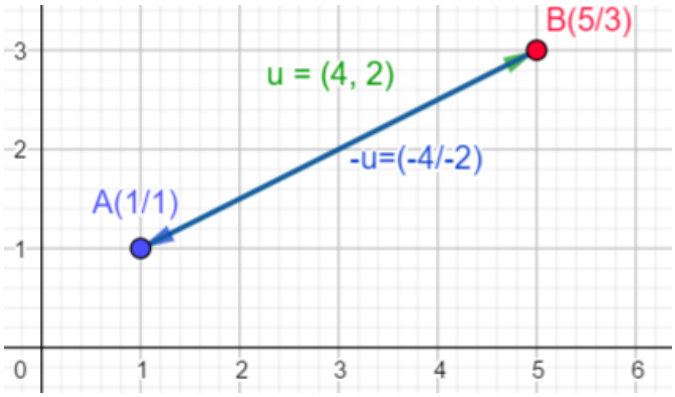
Solche Verschiebungen nennen wir in Zukunft Vektoren und bezeichnen sie mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ usw. Sie werden graphisch durch Pfeile dargestellt.
Im vorliegenden Fall hat man also den Vektor $\vec{u} = \binom{4}{2}$. Da der Vektor $\vec{u}$ die Verschiebung des Punkte A zu Punkt B darstellt, schreibt man auch $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \binom{4}{2}$. Die Zahlen 4 und 2 werden Koordinaten des Vektors $\vec{u}$ genannt. Er hat somit die Koordinatendarstellung $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \binom{4}{2}$.
Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie dieselbe Koordinatendarstellung haben.



Der Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \binom{4}{2}$ hat genau die gleichen Koordinaten wie der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{EF} = \binom{4}{2}$.

Man sieht auch, dass gleiche Vektoren parallel, gleich lang und gleich gerichtet sind.

Ein Vektor wird Gegenvektor genannt, wenn er entgegengesetzt gerichtet ist.



Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \binom{4}{2}$, dann lautet der Gegenvektor $-\vec{u} = \overrightarrow{BA} = \binom{-4}{-2}$.

Der Vektor, der einen Punkt mit sich selbst verbindet, heißt Nullvektor $\overrightarrow{PP}$. Er wird mit $\vec{0}$ bezeichnet und hat die Koordinaten 0, 0. Folglich lautet seine Koordinatendarstellung $\vec{0} = \binom{0}{0}$.

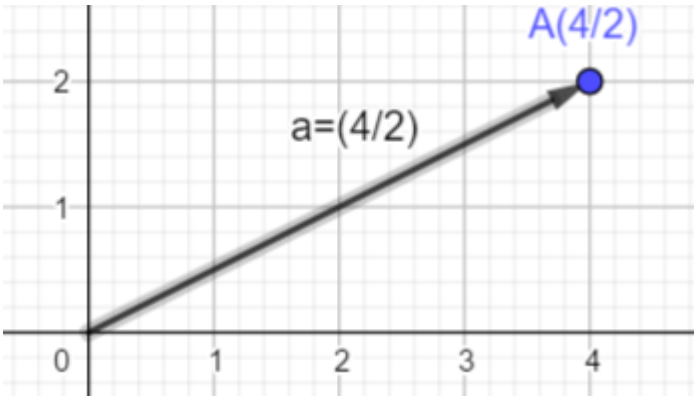
Der Vektor, der von einem Punkt A zu einem Punkt B verläuft, wird auch Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ genannt. Sei A(a_1/a_2) und B(b_1/b_2), dann gilt für den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$. In obigem Beispiel hat der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ die Koordinatendarstellung

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \binom{5 - 1}{3 - 1} = \binom{4}{2}$.

Bisher wurde die Lage eines Punktes P im Koordinatensystem durch Angabe seiner x – und y – Koordinate beschrieben. Mithilfe des Vektors $\overrightarrow{0P}$, der den Koordinatenursprung mit dem Punkt P verbindet, kann man auch den Punkt P beschreiben.

Dieser Vektor $\overrightarrow{0P}$ wird als Ortsvektor bezeichnet und wird mit demselben Buchstaben wie der zugehörige Punkt bezeichnet. Der Ortsvektor $\vec{a}$ eines Punktes A(a_1/a_2) ist der Vektor, der den Ursprung mit dem Punkt A verbindet. Der Punkt A und sein Ortsvektor $\vec{a}$ haben dieselben Koordinaten

$\vec{a} = \overrightarrow{0A} = \binom{a_1}{a_2}$.



In diesem Beispiel ist $\vec{a} = \overrightarrow{0A} = \binom{4 - 0}{2 - 0} = \binom{4}{2}$

1.1. Aufgaben

a) Bestimme die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ für A(2/4) und B(14/12).

Bestimme auch den Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$.

b) Bestimme die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ für A(3/4/–3) und B(4/4/2).

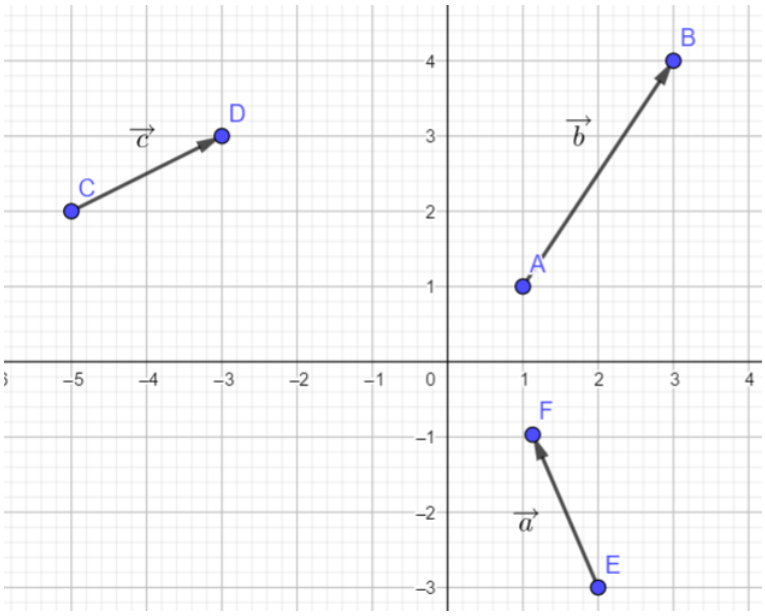
Bestimme auch den Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$.

c) Zeichne drei Pfeile des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ bildet A(4 / – 5) auf den Punkt B ab. Bestimme die Koordinaten von B.

e) Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ bildet den Punkt P auf Q(10/12) ab. Bestimme die Koordinaten des Punktes P.

f) Gib die Koordinaten der eingezeichneten Vektoren an



2. Rechnen mit Vektoren

Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine geordnete Liste von n Zahlen. Die Anzahl n dieser Zahlen wird als Dimension des Vektors bezeichnet.

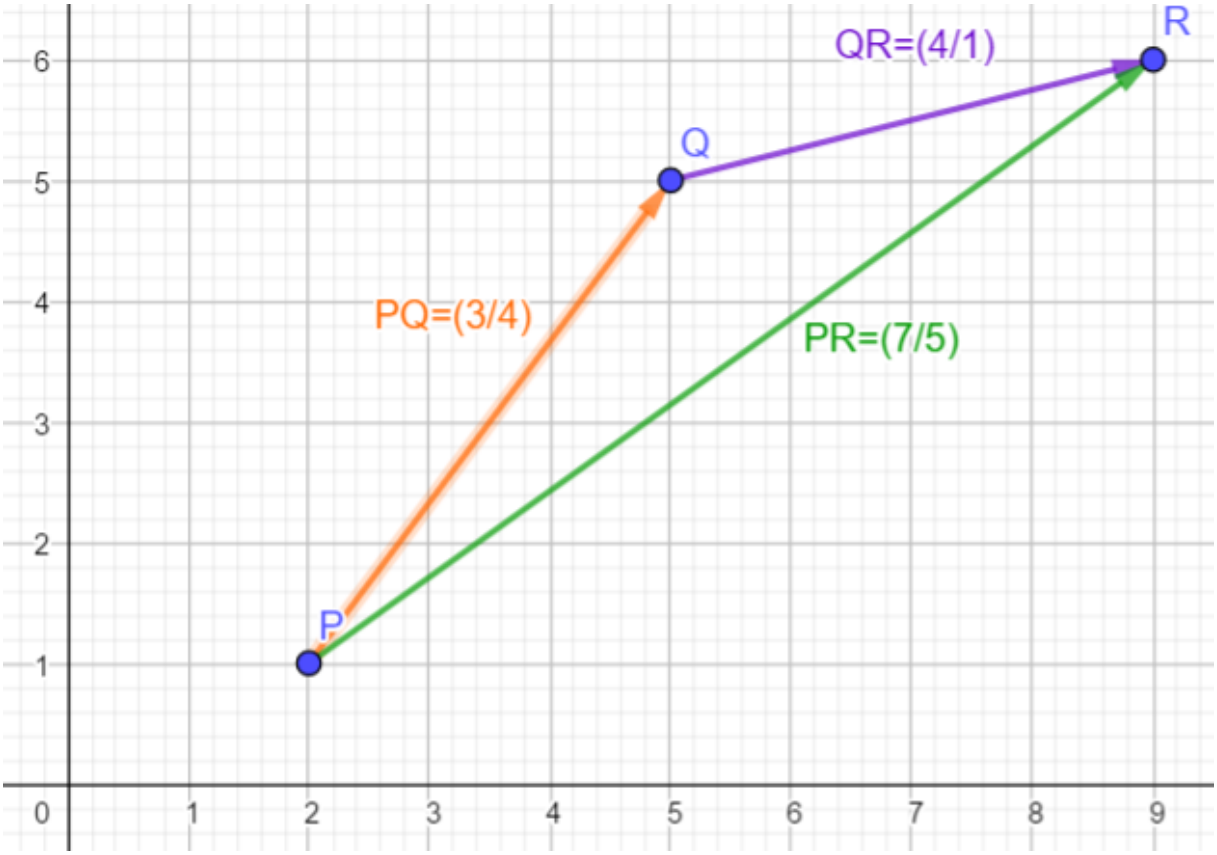
Schreibweise: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

Wir schauen uns nachfolgend an wie man mit Vektoren rechnen kann.

Seien z. B. $\overrightarrow{PQ} = \binom{3}{4}$ und $\overrightarrow{QR} = \binom{4}{1}$, dann berechnet man die Summe wie folgt:

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \binom{3}{4} + \binom{4}{1} = \binom{3+4}{4+1} = \binom{7}{5}$.

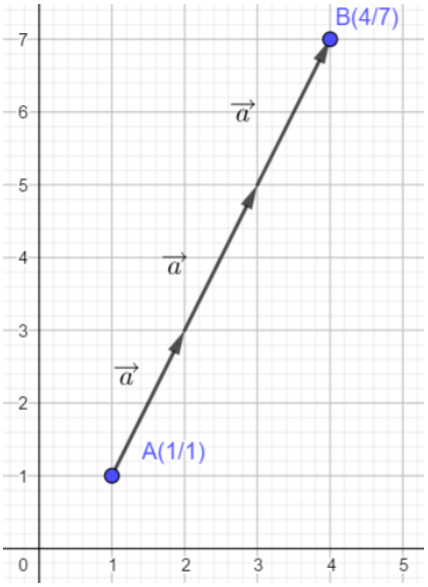
Graphisch kann man sich das als Aneinandersetzen der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ vorstellen.



Man geht von P aus 3 Schritte nach rechts und 4 Schritte hoch und ist bei Punkt Q. Von dort aus geht man 4 Schritte nach rechts und 1 Schritt hoch. Um von P direkt zu R zu kommen, könnte man von P aus 7 Schritte nach rechts und 5 Schritte hoch gehen.

Allgemein gilt für die Addition von Vektoren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

Auch die sogenannte Skalarmultiplikation kann man sich graphisch veranschaulichen. So bedeutet 3 • $\binom{1}{2}$ nichts anderes als dass man den Vektor $\vec{a} = \binom{1}{2}$ dreimal hintereinander ausführt.



Angenommen man beginnt bei A(1/1) und geht dann 2 Schritt nach rechts und 2 Schritte hoch und wiederholt das dreimal, dann endet man bei B(4/7).

Bedeutet doch 3 • $\vec{a}$ nichts anderes als $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$.

Somit ist 3 • $\binom{1}{2} = \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{2} = \binom{3 \bullet 1}{3 \bullet 2} = \binom{3}{6}$.

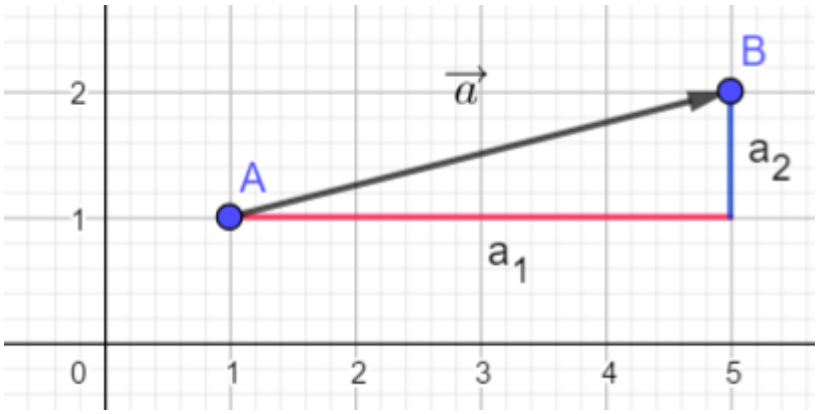
Allgemein: s • $\binom{a_1}{a_2} = \binom{s \bullet a_1}{s \bullet a_2}$

„Normale“ reelle Zahlen nennt man im Zusammenhang mit Vektoren Skalare. Sie werden dann meist mit griechischen Buchstaben wie λ, μ und v bezeichnet.

Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \bullet a_1 \\ \lambda \bullet a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \bullet a_n \end{pmatrix}$

Beispiel: $3 \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \bullet 3 \\ 3 \bullet 7 \\ 3 \bullet (-6) \\ 3 \bullet 9 \\ 3 \bullet (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ -18 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix}$

Entfernungen lassen sich mithilfe von Vektoren einfach bestimmen. Sie entsricht genau der Länge des Pfeils, welcher beide Punkte verbindet. Abgeleitet von der Darstellung eines Vektors als Pfeil ist der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors definiert. Der Betrag beschreibt also Länge eines Vektors.



Der Vektor $\vec{a}$ ist die Hypotenuse im virtuellen Dreieck. Die Katheten sind hier a_1 und a_2. Die Länge des Vektors berechnet man also mithilfe des Satzes von Pythagoras. Es gilt somit:

$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ | radizieren

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Im obigen Beispiel ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

Allgemein: Betrag von $\vec{a}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Als Sonderfall ist noch das Vektorprodukt definiert. Manchmal wird es auch Kreuzprodukt genannt.

Vektorprodukt: : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \bullet b_3 - a_3 \bullet b_2 \\ a_3 \bullet b_1 - a_1 \bullet b_3 \\ a_1 \bullet b_2 - a_2 \bullet b_1 \end{pmatrix}$

Eine andere bemerkenswerte Eigenschaft des Kreuzproduktes findet sich als geometrische Deutung. Betrachten wir die Ebene, die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen. Ergänzt man die Pfeile zu einem Parallelogramm, wie nebenstehend dargestellt, dann ist der Betrag des Kreuzproduktes gleich der gelb dargestellten Fläche dieses Parallelogramms in dieser Ebene.

Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt somit: A = $|\vec{a}\ x\ \vec{b}|$

$r_1 \cdot \vec{a_1} + r_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots . r_n \cdot \vec{a_n}$, mit n ∈ ℕ, nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.
Die reellen Zahlen r_1, r_2, …, r_n heißen Koeffizienten.

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und relle Zahlen r,s gelten folgende Rechengesetze:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	Assoziativgesetz
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativgesetz
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Addition des neutralen Elements
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Existenz eines Inversen: $-\vec{a}$
$r \bullet (s \bullet \vec{a}) = (r \bullet s) \bullet \vec{a}$	
$r \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = r \bullet \vec{a} + r \bullet \vec{b}$	Distributivgesetz
$(r + s) \bullet \vec{a} = r \bullet \vec{a} + s \bullet \vec{a}$	Distributivgesetz

Alle genannten Regeln gelten auch für Vektoren im Raum, die dreimensionalen Vektoren.

Sie gelten sogar für n – dimensionale Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

2.1. <u>Aufgaben</u>

a) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ und $2 \bullet \vec{a}$ und $-4 \bullet \vec{b}$

b) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

Bestimme $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ und $-10 \bullet \vec{a}$ und $\frac{1}{2} \bullet \vec{b}$ und $3 \bullet \vec{a} + 5 \bullet \vec{b}$

c) Schreibe die Vektoren jeweils als Produkt aus einem Skalar und einem Vektor.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ iiii) $\begin{pmatrix} -20 \\ 50 \\ -10 \end{pmatrix}$

d) Bestimme rechnerisch, falls möglich, eine Zahl x, so dass gilt:

i) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ iiii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$

e) Bestimme, falls möglich, Zahlen für r und s, so dass gilt:

i) $r \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

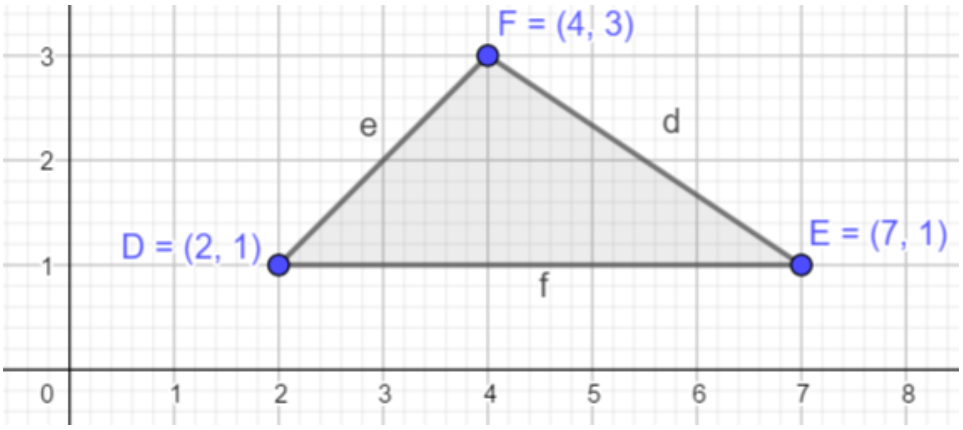
ii) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = r \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = s \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) Berechne jeweils die Beträge der Vektoren

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

g) Berechne die Seitenlängen des Dreiecks



h) Zeige rechnerisch, dass das Viereck A(1/3), B(1/1), C(6/1) und D(6/3) ein Rechteck ist.

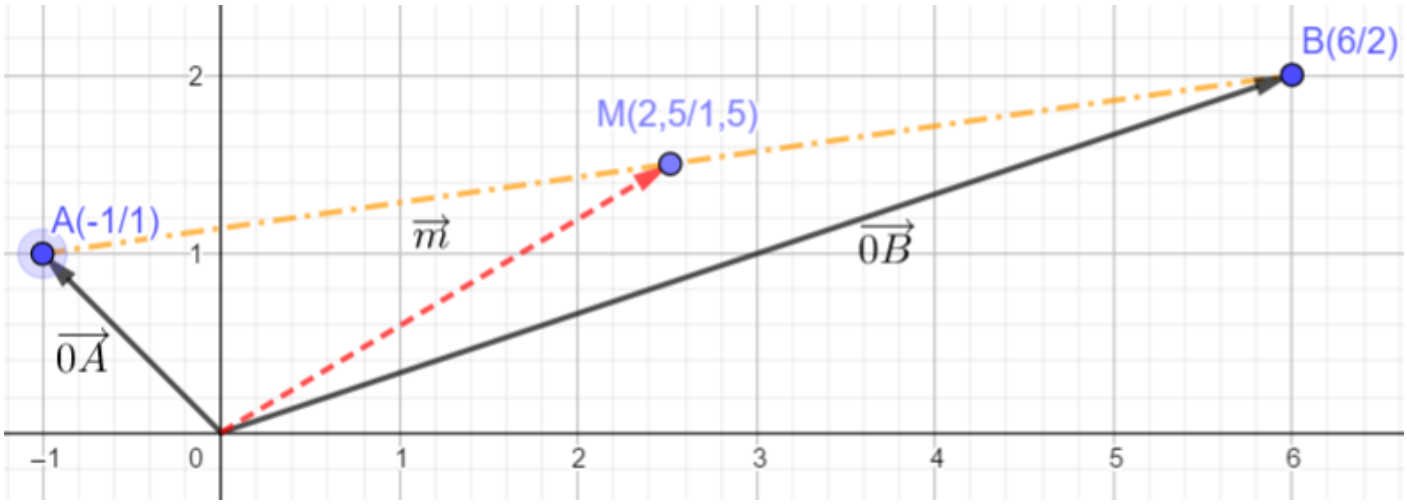
i) Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Eckpunkte F(7/2) und E(8/4). $\overline{EF}$ ist ein Schenkel dieses Dreiecks. Bestimme den Punkt G rechnerisch.

3. <u>Länge und Mittelpunkt einer Strecke</u>

Wenn zwei Punkte A und B gegeben sind, dann kann man mithilfe der Vektorrechnung den Mittelpunkt zwischen diesen Punkten bestimmen.

Gegeben seien die Punkte A(–1/1) und B(6/2). Der Vektor $\vec{m}$ sei ein Ortsvektor, für den gilt

$\vec{m} = \overrightarrow{0M}$. Weiterhin ist $\vec{m} = \overrightarrow{0M} = \frac{1}{2} \bullet (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}) = \frac{1}{2} \bullet (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$



Der Mittelpunkt hat somit die Koordinaten M(2,5/1,5)

Analog geht man im $\mathbb{R}^3$ vor. Gegeben seien die vier Punkte A(3/2/–1), B(3/6/–1), C(1/6/–1) und D(1/2/–1) eines Quadrats. Es soll der Mittelpunkt des Quadrats bestimmt werden.

$$\vec{m} = \overrightarrow{0M} = \frac{1}{2} \bullet (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0C}) = \frac{1}{2} \bullet \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um die Koordinaten eines Mittelpunkts zwischen zwei Punkten A und B zu berechnen, addiert man die Koordinaten der beiden Punkte und halbiert diese Werte: $\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2} \bullet (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B})$

3.1. <u>Aufgaben</u>

a) Berechne den Mittelpunkt zwischen A(2/3/4) und B(5/6/7).

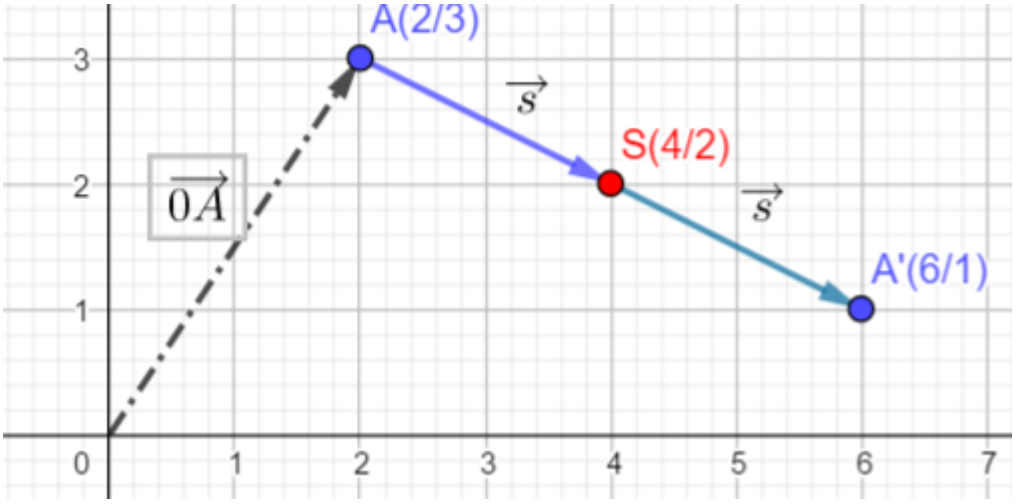
b) Die Punkte A(2/1), B(5/1), C(5/5) und D(2/5) seien die Ecktpunkte eines Rechtecks.
Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts des Rechtecks.

4. Spiegelung eines Punktes

Von der Spiegelung wissen wir, dass der Punkt und der Spiegelpunkt jeweils den gleichen Abstand von der Spiegelachse bzw. vom Spiegelpunkt haben.

Soll der Punkt A am Punkt S gespiegelt werden, so gilt $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SA'}|$.

In unserem Beispiel sei A(2/3) und S(4/2). Um die Koordinaten von A‘ zu erhalten, bestimmen wir zuerst $\overrightarrow{AS}. \overrightarrow{AS} = \binom{4}{2} - \binom{2}{3} = \binom{2}{-1}$. Anschließend berechnet man den Ortsvektor von A‘. Für ihn gilt: $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \bullet \overrightarrow{AS} = \binom{2}{3} + 2 \bullet \binom{2}{-1} = \binom{6}{1}$. Somit hat A‘ die Koordinaten (6/1).



Einen Punkt spiegelt man einem Punkt S, indem man $\overrightarrow{AS}$ bestimmt. Für $\overrightarrow{0A'}$ gilt dann

$\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \bullet \overrightarrow{AS}$

4.1. Aufgaben

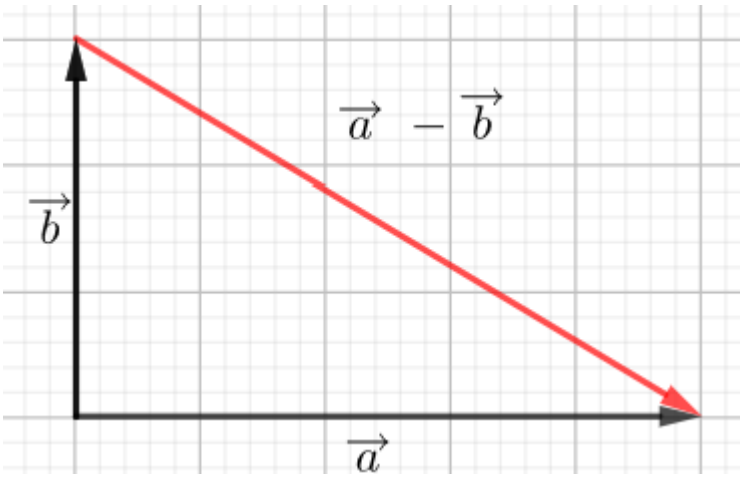
a) Der Punkt A wird an S(4/5) bzw. S(4/5/6) gespiegelt. Bestimme die Koordinaten von A‘

i) A(5/8) ii) A(4/–2) iii) A(5/6/7) iii) A(–3/5/–8)

5. Orthogonale Vektoren

Bei geometrischen Fragestellungen ist die Orthogonalität oft von großer Bedeutung. Diese kann auch mithilfe von Vektoren beschrieben werden.

Nach der Umkehrung des Satz‘ von Pythagoras gilt für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.



Es gilt mit der Definition des Betrags:

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)$.

Weiterhin ist:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \overset{\text{Binomische Formel}}{\cong} (a_1^2 - 2 \bullet a_1 b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2 \bullet a_2 b_2 + b_2^2)$.

Da $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ist auch

$(a_1^2 - 2 \bullet a_1 b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2 \bullet a_2 b_2 + b_2^2) = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) \mid -a_1^2 \mid -b_1^2 \mid -a_2^2 \mid -b_2^2$

$\Leftrightarrow -2 \bullet a_1 b_1 - 2 \bullet a_2 b_2 = 0$

$\Leftrightarrow -2 \bullet (a_1 b_1 + a_2 b_2) = 0$ | Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Also muss $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ sein. $a_1 b_1 + a_2 b_2$ ist ja gerade das Skalarprodukt. Daraus folgt der Satz:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Das heißt $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ bzw. $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$. In Kurzschreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.

5.1. Aufgaben

a) Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -3 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a_2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ b_2 \\ -4 \end{pmatrix}$

iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

6. Lineare Abhängigkeit

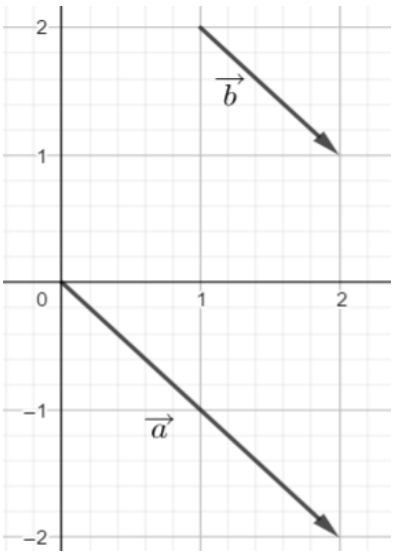
Definition: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$.

Die geometrische Bedeutung von linearer Abhängigkeit kann man sich so vorstellen:

Linear abhängige Vektoren verlaufen parallel.

Im Beispiel ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Es ist also $2 \bullet \vec{b} = \vec{a} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Lineare Abhängigkeit lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Determinante[1] überprüfen, wenn man so viele Vektoren hat wie die Dimension der Vektoren ist. Also z. B. 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Es gilt dann: $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ $\Leftrightarrow$ Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

Exkurs Determinante:

Beginnen wir mit der Schreibweise. Eine Matrix A wird zur Determinanten, indem man einfach det davorschreibt. Man kann auch anstelle der großen Klammern einen senkrechten Strich vor und hinter die Zahlen setzen. Die zweite Methode ist die gebräuchlichere.

[1] Einzelheiten zu Determinanten finden sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/det.pdf

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Berechnung einer zweireihigen Determinante erfolgt nach folgender Definition:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{21} \bullet a_{12}$$

Dieses „Zahlengewusel““ bei den Indizes ist in dieser Form nicht leicht zu merken. Besser geht es optisch. Schaut man sich an, wo die Elemente des ersten Produktes $a_{11} \bullet a_{22}$ liegen, dann erkennt man eine Diagonale von links oben nach rechts unten. Man nennt diese Diagonale auch die ” Hauptdiagonale“ (blau) der Matrix. Das Produkt auf der Hauptdiagonale ist positiv. Negativ wird das Produkt $a_{21} \bullet a_{12}$ auf der anderen Diagonalen, der ” Nebendiagonalen“ (rot) gewertet.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Nehmen wir nochmal unsere Vektoren von oben. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wir schreiben sie zunächst in eine Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Dann berechnen wir deren Determinante:

det A = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ = 2 • (–1) – 1 • (–2) = – 2 + 2 = 0

Die Determinante ist Null, woraus folgt, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind, also parallel zueinander verlaufen.

Möchte man drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit überprüfen, so schreibt man diese auch wieder als Matrix. Aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ wird $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung der Determinanten schreibt man, nach der Regel von Sarrus, die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben die Matrix.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

Nun werden die Produkte der Zahlen entlang einer blauen Diagonale gebildet und addiert. Dann subtrahiert man jeweils die Produkte der Zahlen entlang der roten Diagonalen.

det A = 1 • 5 • 9 + 2 • 6 • 7 + 3 • 4 • 8 – 3 • 5 • 7 – 1 • 6 • 8 – 2 • 4 • 9

= 45 + 84 + 96 – 105 – 48 – 72 = 0

Daraus folgt, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind, also parallel zueinander verlaufen.

6.1. Aufgaben

a) Untersuche die Vektoren auf lineare Abhängigkeit

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}8\\-18\end{pmatrix}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\-4\end{pmatrix}$

iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

7. Lösungen

7.1. Lösungen zu 1.1.

a) Bestimme die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ für A(2/4) und B(14/12).

Bestimme auch den Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}14 - 2\\12 - 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$ ist $\overrightarrow{BA}$. Also $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}2 - 14\\4 - 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-8\end{pmatrix}$

b) Bestimme die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ für A(3/4/–3) und B(4/4/2).

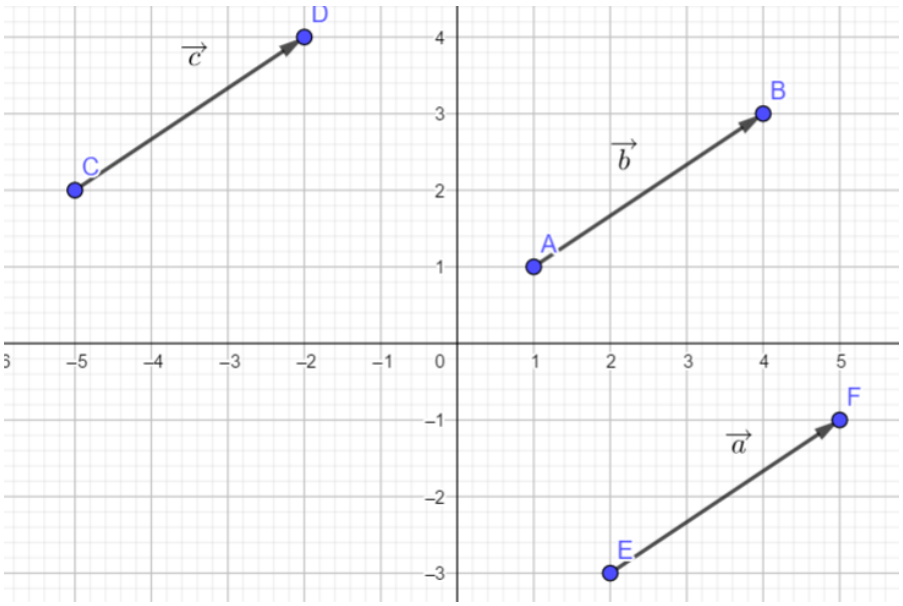
Bestimme auch den Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4 - 3\\4 - 4\\2 - (-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$ ist $\overrightarrow{BA}$. Also

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}3 - 4\\4 - 4\\-3 - 2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-5\end{pmatrix}$$

c) Zeichne drei Pfeile des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem.



d) $\vec{a} = \binom{5}{3}$ bildet A(4 / – 5) auf den Punkt B ab. Bestimme die Koordinaten von B.

Es ist $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Also $\vec{a} = \binom{5}{3} = \binom{b_1 - 4}{b_2 - (-5)}$

Daraus ergeben sich die zwei linearen Gleichungen

I: $5 = b_1 - 4 \Leftrightarrow b_1 = 9$ und II: $3 = b_2 - (-5) \Leftrightarrow -2$

Der Punkt B hat die Koordinaten (9 / –2)

e) Der Vektor $\vec{a} = \binom{7}{2}$ bildet den Punkt P auf Q(10/12) ab. Bestimme die Koordinaten des Punktes P.

Es ist $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Also $\vec{a} = \binom{7}{2} = \binom{10 - p_1}{12 - p_2)}$

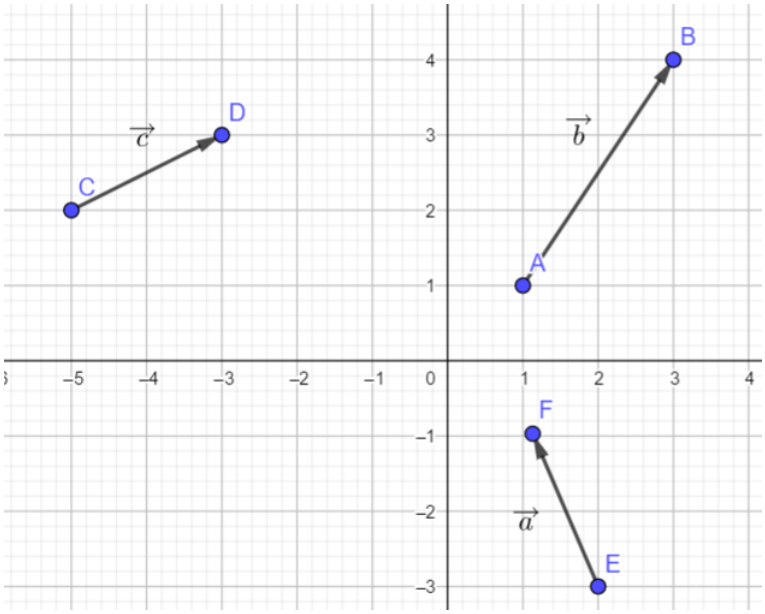
Hieraus ergeben sich die zwei linearen Gleichungen

I: $7 = 10 - p_1 \Leftrightarrow p_1 = 3$ und II: $2 = 12 - p_2 \Leftrightarrow p_2 = 10$

Der Punkt P hat die Koordinaten (3 / 10)

f) Gib die Koordinaten der eingezeichneten Vektoren an

$\vec{a} = \binom{-1}{2}$; $\vec{b} = \binom{2}{3}$; $\vec{c} = \binom{2}{1}$



7.2. Lösungen zu 2.1.

a) Es seien $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $\vec{b} = \binom{6}{5}$. Bestimme $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ und $2 \cdot \vec{a}$ und $-4 \cdot \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = \binom{2}{1} + \binom{6}{5} = \binom{8}{6}$

$\vec{a} - \vec{b} = \binom{2}{1} - \binom{6}{5} = \binom{-4}{-4}$

$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \binom{2}{1} = \binom{4}{2}$

$-4 \cdot \vec{b} = -4 \cdot \binom{6}{5} = \binom{-24}{-20}$

b) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

Bestimme $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ und $-10 \bullet \vec{a}$ und $\frac{1}{2} \bullet \vec{b}$ und $3 \bullet \vec{a} + 5 \bullet \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 17 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$

$3 \bullet \vec{a} = 3 \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 21 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $5 \bullet \vec{b} = 5 \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -20 \\ -50 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$

c) Schreibe die Vektoren jeweils als Produkt aus einem Skalar und einem Vektor.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ iiii) $\begin{pmatrix} -20 \\ 50 \\ -10 \end{pmatrix} = 10 \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) Bestimme, falls möglich, eine Zahl x, so dass gilt:

i) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}5 \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = x \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

iiii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

e) Bestimme, falls möglich, Zahlen für r und s, so dass gilt:

Man stelle jeweils ein lineares Gleichungssstem auf:

i) $r \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

I: 2r + 2s = 8

II: 2r + 4s = 10

In diesem Fall bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an, indem man beide Gleichungen nach 2r auflöst.

I: 2r = 8 – 2s

II: 2r = 10 – 4s

8 – 2s = 10 – 4s | + 4s | – 8 ⇔2s = 2 ⇔ s = 1

s in I: 2r = 8 – 2 • 1 ⇔ r = 3

ii) $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = r \bullet \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

I: 5 + 2s = 0r

II: 4 + (–3s) = r

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren an, indem man I nach 2 auflöst.

I: s = 2,5

s in II: 4 – 3 • 2,5 = r = – 3,5

iii) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = s \bullet \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$

I: 3 + (–1)r = 0s

II: 2 + 0r = 0s

III: 1 + 3r = 5s

Ein LGS mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten ist nicht lösbar. Daher gibt es keine Zahlen für r und s.

f) Berechne jeweils die Beträge der Vektoren

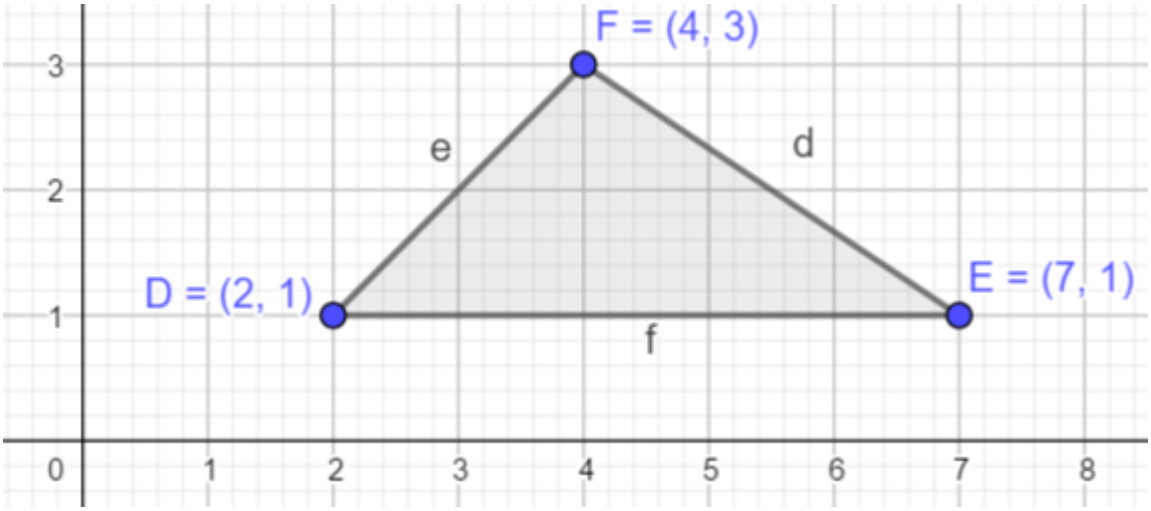
i) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ → $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$ → $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 0^2} = \sqrt{144} = 12$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ → $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix}$ → $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$

g) Berechne die Seitenlängen des Dreiecks

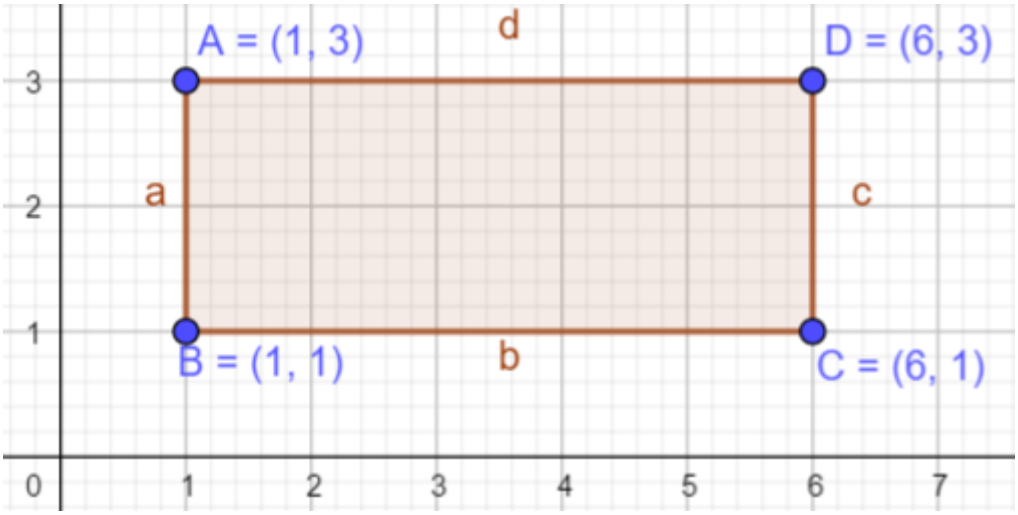


Es sind zuerst die Vektoren $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{EF}$ zu bestimmen.

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ $\quad$ $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$ $\quad$ $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

h)Zeige rechnerisch, dass das Viereck A(1/3), B(1/1), C(6/1) und D(6/3) ein Rechteck ist.



Es sind zuerst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{DA}$ zu bestimmen.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

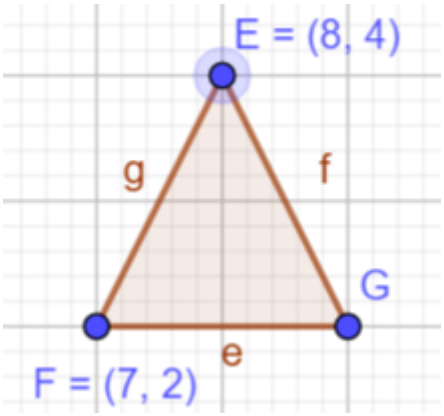
Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ folgt, dass $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\quad$ $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Da gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind handelt es sich bei dem Viereck um ein Rechteck.

i) Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Eckpunkte F(7/2) und E(8/4). $\overline{EF}$ ist ein Schenkel dieses Dreiecks. Bestimme den Punkt G rechnerisch.



Man bestimmt zunächst den Vektor $\overrightarrow{FE}$.

$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beim gleichschenkligen Dreieck liegt der Punkt E in der Mitte von $\overrightarrow{FG}$, allerdings nach oben versetzt.

Man geht also von E 1 Schritt nach rechts und 2 nach unten, was dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ entspräche.

Der Punkt G hat somit die Koordinaten (9/2).

7.3. Lösungen zu 3.1.

a) Berechne den Mittelpunkt zwischen A(2/3/4) und B(5/6/7).

$\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2} \bullet (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}) = \frac{1}{2} \bullet \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$. M(3,5 / 4,5 / 5,5)

b) Die Punkte A(2/1), B(5/1), C(5/5) und D(2/5) seien die Ecktpunkte eines Rechtecks. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts des Rechtecks.

$\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2} \bullet (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0C}) = \frac{1}{2} \bullet \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0{,}5 \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$. M(3,5 / 3)

7.4. Lösungen zu 4.1.

a) Der Punkt A wird an S(4/5) bzw. S(4/5/6) gespiegelt. Bestimme die Koordinaten von A‘

i) A(5/8) $\rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) A(4/–2) $\rightarrow \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

iii) A(5/6/7) → $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} + 2 \bullet \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$

iii) A(–3/5/–8) → $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\5\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\14\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-8\end{pmatrix} + 2 \bullet \begin{pmatrix}7\\0\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\0\\28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\5\\20\end{pmatrix}$

7.5. Lösungen zu 5.1.

a) Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?

$\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \bullet 3 + 0 \bullet 2 = 15$ → nicht orthogonal zueinander

$\vec{a} \bullet \vec{c} = 5 \bullet 0 + 0 \bullet 2 = 0$ → orthogonal zueinander

$\vec{a} \bullet \vec{c} = 5 \bullet (-2) + 0 \bullet 3 = -10$ → nicht orhtogonal zueinander

$\vec{b} \bullet \vec{c} = 3 \bullet 0 + 2 \bullet 2 = 4$ → nicht orthogonal zueinander

$\vec{a} \bullet \vec{d} = 3 \bullet (-2) + 2 \bullet 3 = 0$ → orthogonal zueinander

b) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\-3\end{pmatrix}$ → $2 \bullet b_1 + 4 \bullet (-3) = 0 \mid + 12 \Leftrightarrow 2 \bullet b_1 = 12 \mid : 2 \Leftrightarrow b_1 = 6$

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\a_2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ → $5 \bullet 7 + a_2 \bullet 3 = 0 \mid - 35 \Leftrightarrow a_2 \bullet 3 = 35 \mid : 3$ $a_2 = \frac{35}{3}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\b_2\\-4\end{pmatrix}$

→ $4 \bullet 2 + 5 \bullet b_2 + 7 \bullet (-4) = 0 \Leftrightarrow 8 + 5 \bullet b_2 - 28 = 0 \mid + 23 \Leftrightarrow 5 \bullet b_2 = 23 \mid : 5 \Leftrightarrow b_2 = \frac{23}{5}$

iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-3\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\8\\-3\end{pmatrix}$

→ $4 \bullet 4 + (-3) \bullet 8 + a_3 \bullet (-3) = 0 \Leftrightarrow 16 - 24 + a_3 \bullet (-3) = 0 \mid + 8 \Leftrightarrow -3 \bullet a_3 = 8 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{8}{3}$

7.6. <u>Lösungen zu 6.1.</u>

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ → $A = \begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix}$ → $\det A = \begin{vmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{vmatrix} = 3 \bullet 2 - 6 \bullet 1 = 0$ ➔ linear abhängig

ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \end{pmatrix}$ → A = $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}$ → det A = $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -9 & -18 \end{vmatrix}$ = 3 • (–18) – 8 • (–9) = 18

➔ linear unabhängig

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ → A = $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ → det A = $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

= 4 • 3 • (–4) + 3 • (–5) • 2 + (–2) • 1 • 3 – (–2) • 3 • 2 – 4 • (–5) • 3 – 3 • 1 • (–4)

= – 48 + (– 30) + (–6) – (–12) – (–60) – (–12)

= 0 ➔ linear abhängig

iiii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → det A = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

= 2 • 4 • 0 + 3 • 0 • 1 + 2 • 3 • 1 – 2 • 4 • 1 – 2 • 0 • 1 – 3 • 3 • 0

= 0 + 0 + 6 – 8 – 0 – 9

= – 11 ➔ linear unabhängig