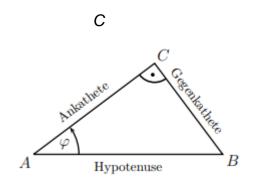
Zunächst werden die Winkelfunktionen *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* im rechtwinkligen Dreieck definiert, denn diese Definitionen sind relativ einfach zu verstehen. Leider werden durch diese Definitionen nur Winkel im Bereich zwischen 0° und 90° erfasst. Da es aber auch größere und sogar negative Winkel gibt, müssen diese Definitionen auf diese Winkelbereiche erweitern. Dies geschieht dann am **Einheitskreis**.

## <u>Definitionen im rechtwinkligen Dreieck</u>

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC.

Der rechte Winkel liegt beim Punkt C. Die am

Rechnen Winkel anliegenden Seiten nennt man Katheten, die gegenüberliegende Seite Hypotenuse<sup>1</sup>. Dann gibt es noch den Winkel, mit dem die Winkelfunktionen definiert werden sollen. Er heißt hier  $\phi$ . Zu diesem Winkel gibt es zwei verschiedene Katheten. Die Ankathete liegt am Winkel  $\phi$  an, sie



ist ein Schenkel dieses Winkels, die Gegenkathete liegt ihm gegenüber. Noch einmal ganz deutlich, weil das immer wieder falsch verstanden wird: Keine Kathete ist von Natur aus Ankathete oder Gegenkathete, es kommt immer auf den betrachteten Winkel an! Von dem hier nicht bezeichneten Winkel beim Punkt B aus wurden Ankathete und Gegenkathete genau umgekehrt liegen. Mit dieser Planskizze ergeben sich folgende Definitionen:

$$\sin \alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$\cos \alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$\tan \alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Eine Merkregel zur Rechtschreibung: Sowohl **Kathete** als auch **Hypotenuse** schreibt man mit genau einem **h**.

## Definitionen für Sinus und Kosinus

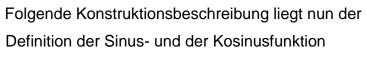
Nebenstehend ist ein Einheitskreis dargestellt. Darunter versteht man einen Kreis, dessen Radius

 $\cos \phi$ 

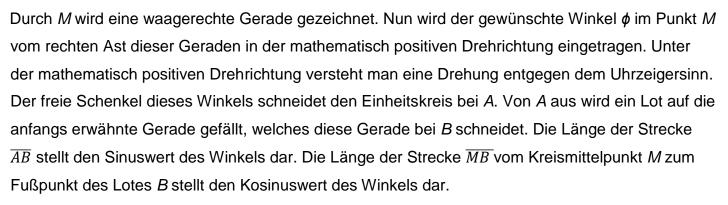
R

genau eine Längeneinheit misst. Dabei spielt es keine Rolle, wie die Einheit genau heißt. Das kann ein Zentimeter, ein Zoll, ein Meter oder auch eine Daumenbreite des Zeichners sein. Wichtig ist nur, dass in der

Zeichners sein. Wichtig ist nur, dass in der gewählten Einheit die Radiuslange eine Längeneinheit ist.



zugrunde: Der Punkt *M* ist der Mittelpunkt des Einheitskreises.



Diese Definition ist nun für jeden beliebigen Winkel anwendbar. Die Beschränkung auf den Bereich 0° ...90° ist hiermit nicht mehr erforderlich. Sie ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn sie im Bereich zwischen 0° und 90° mit der Definition am rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt. Diese Übereinstimmung möchte ich zunächst für den Sinus beweisen.

Nach der Definition im Rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin \alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

Das Dreieck MAB in der vorliegenden Planskizze ist ein Rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel liegt bei B. Dann ist die Strecke  $\overline{MA}$  die Hypotenuse. Da diese Strecke gleichzeitig den Radius des Einheitskreises darstellt, hat sie die Länge eine Längeneinheit. Die Gegenkathete ist die Strecke  $\overline{AB}$ . Diese Strecke ist von der neuen Definition als sin  $\alpha$  bezeichnet worden. Wir setzen diese Werte in die obige Gleichung ein:

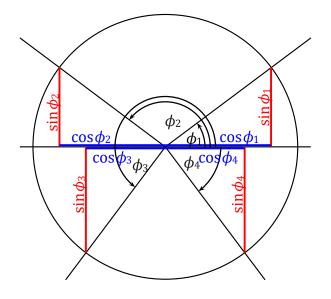
$$\sin \alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MA}} = \frac{\sin \alpha}{1} = \sin \alpha$$

Wir sehen, dass die Definition stimmt.

Nach der gleichen Methode können wir auch die erweiterte Definition von cos α auf die Übereinstimmung mit der alten Definition untersuchen. Das kann jeder schnell für sich untersuchen, ich spare mir das an dieser Stelle, der Beweis ist tatsächlich fast identisch.

Nach der Konstruktionsbeschreibung kann man nun problemlos auch Winkel über 90° oder auch negative Winkel eintragen, jedes Mal erhalten wir einen Sinusund auch einen Kosinuswert.

Eingetragen ist neben  $\phi_1$  der Winkel  $\phi_2$  mit etwa 143°. Die Strecke, die  $\sin\phi_2$  darstellt, zeigt nach oben. Das bedeutet, der Sinuswert ist positiv. Dagegen zeigt die Strecke, die  $\cos\phi_2$  darstellt, nach links, also entgegen der als positiv definierten Richtung. Der Kosinuswert ist also negativ.



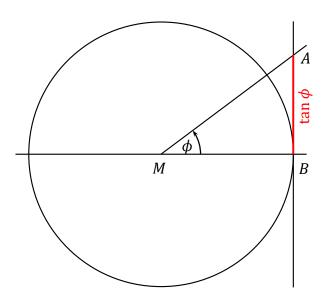
Eingezeichnet ist auch der Winkel  $\phi_3 \approx 233^\circ$ . Hier zeigt die Sinuslinie nach unten. Der Sinuswert ist also ebenso, wie der Kosinuswert im Bereich 180° ... 270° negativ. Und zum Schluss sei noch der Winkel  $\phi_4$  erwähnt, der negativ ist. Daher wird er in der anderen Richtung eingetragen, in der mathematisch negativen Drehrichtung. Wie man leicht sieht, wäre dieser Winkel von etwa –53° identisch mit einem Winkel von +327°. Weiterhin erkennt man, dass hier der Sinuswert negativ ist, der Kosinuswert jedoch positiv.

## **Definition des Tangens**

Auch für die Tangensfunktion können wir eine Definition im Einheitskreis angeben, die dann nicht mehr auf den Bereich 0° ... 90° beschränkt ist. Natürlich muss auch diese für Winkel im Bereich 0° ... 90° mit der Definition am rechtwinkligen Dreieck übereinstimmen.

Zur Planskizze gehört folgende Konstruktionsbeschreibung:

Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Einheitskreises. Durch M wird eine waagerechte Gerade gezeichnet. Eine weitere Gerade wird am rechten Rand des Einheitskreises im Punkt B als senkrechte Tangente eingezeichnet. Nun wird der gewünschte Winkel  $\phi$  im Punkt M vom rechten Ast der waagerechten Geraden in der mathematisch positiven Drehrichtung eingetragen. Unter der mathematisch positiven Drehrichtung versteht man eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet die



senkrechte Gerade im Punkt A. Falls der freie Schenkel von  $\phi$  diese Gerade nicht schneidet, weil er nach links in den 2. oder 3. Quadranten zeigt, muss er rückwärts über M hinaus verlängert werden. Dann stellt die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  den Tangenswert dar.

Wir wollen prüfen, ob diese Definition mit der Definition im rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt. Dazu sehen wir uns das Dreieck *MAB* an. Der rechte Winkel liegt bei

B. Dann ist bezogen auf den Winkel  $\phi$  die Strecke  $\overline{MB}$  die Ankathete und die Strecke  $\overline{AB}$  die Gegenkathete. Da die Strecke  $\overline{MB}$  den Radius des Einheitskreises darstellt, hat sie die Länge 1. Dann ergibt die Definition aus dem rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AB}}{1}$$

Also ist tatsächlich die Strecke  $\overline{AB} = \tan \phi$ .

Wenn der der freie Schenkel von  $\phi$  genau senkrecht nach oben oder unten zeigt, gibt es keinen Schnittpunkt. Daher ist der Tangens von Winkeln mit 90°, 270°, -90°, -270°, usw. nicht definiert.