Winkelbeziehungen

© Sascha Hunsicker

April 2020

Inhalt

1. Nebenwinkel 2

2. Scheitelwinkel 2

3. Stufenwinkel 3

4. Wechselwinkel 4

5. Winkelsumme im Dreieck 4

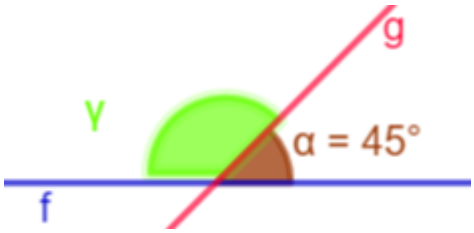
6. Dreiecksformen 6

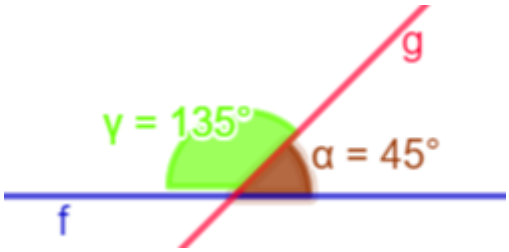
7. Satz des Thales 7

1. Nebenwinkel

Ein gestreckter Winkel ist genau 180° groß. Geht man von einem Punkt auf einer Geraden zu einem anderen Punkt auf genau derselben Geraden, so ist dieser Winkel 180° groß.

Wenn nun der Winkel α (alpha) 45° groß ist. Wie groß muss dann der Winkel γ (gamma) sein? Von dem gestreckten Winkel mit 180° hat man sich im Beispiel bereits um 45° gedreht. Es verbleiben daher
180° – 45° = 135°.

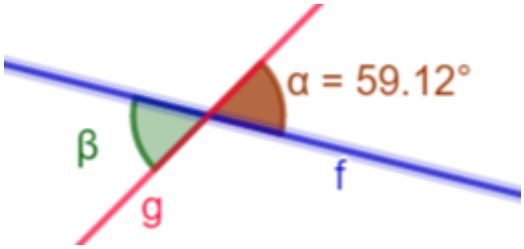


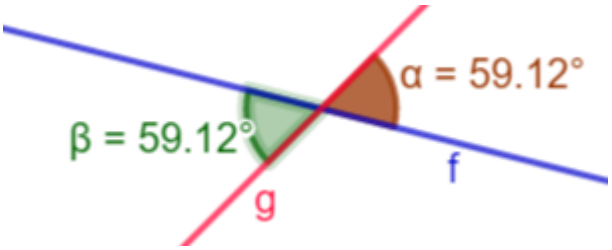


Da der Winkel γ neben dem Winkel α liegt, nennt man ihn Nebenwinkel. Man sieht, dass Nebenwinkel immer zusammen 180° ergeben.

2. Scheitelwinkel

Welche Größe haben Winkel, die sich gegenüberliegen? Der Winkel α wurde am Schnittpunkt der Geraden g und f gespiegelt. Da wir wissen, dass sich die Größe der Winkel bei der Spiegelung nicht ändert, muss der Winkel β genauso groß wie der Winkel α sein.

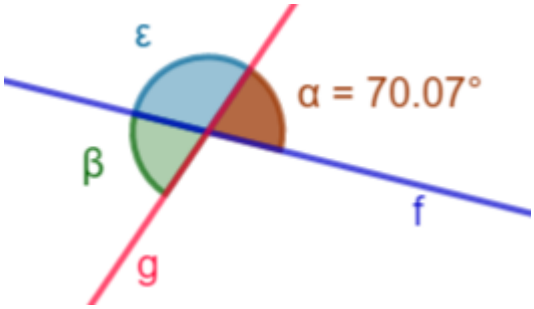




Gegenüberliegende Winkel nennt man Scheitelwinkel. Sie haben immer die gleiche Größe, α = β.

Ist ein Winkel am Schnittpunkt von Geraden gegeben, so kann man die fehlenden Winkel bestimmen.

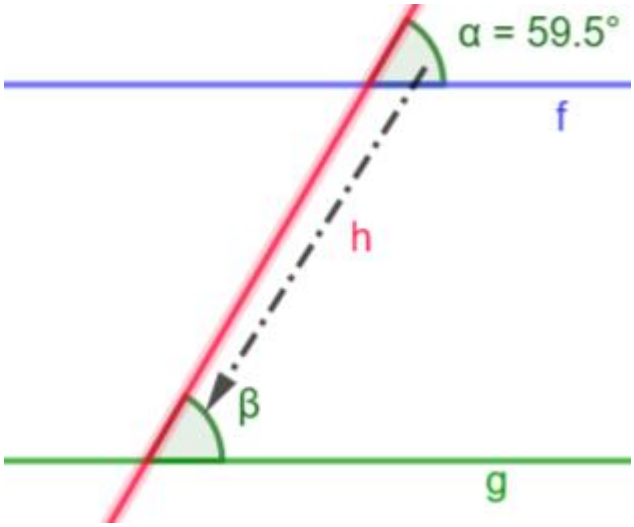
Der Winkel ε (epsilon) ist ein Nebenwinkel zu α. Also gilt α + ε = 180°. Löst man diese Gleichung nach ε auf, so erhält man ε = 180° – α. Nun setzt man den Wert des Winkels α ein und kann somit ε bestimmen.
ε = 180° – 70,07 = 109,93°.

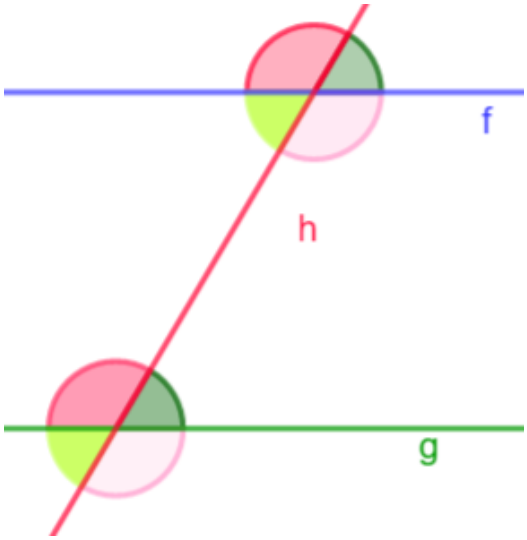


Den Winkel β kann man nun auf zwei Arten bestimmen. Er ist einerseits Nebenwinkel zu ε. Andererseits ist er ein Scheitelwinkel zu α. Da Scheitelwinkel gleich groß sind, gilt β = α. Somit ist der Winkel β = 70,07°.

3. <u>Stufenwinkel</u>

Besondere Beziehungen zwischen Winkeln ergeben sich auch, wenn parallele Geraden von einer Geraden geschnitten werden. Die Gerade f ist parallel zu g, f || g. Beide werden von der Geraden h geschnitten. Es stellt sich nun die Frage wie groß der Winkel β ist. Wenn man den Winkel α entlang der Geraden h verschiebt, so landet man bei dem Winkel β. Da die Größe des Winkels bei der Verschiebung gleichbleibt, folgt, dass α = β.

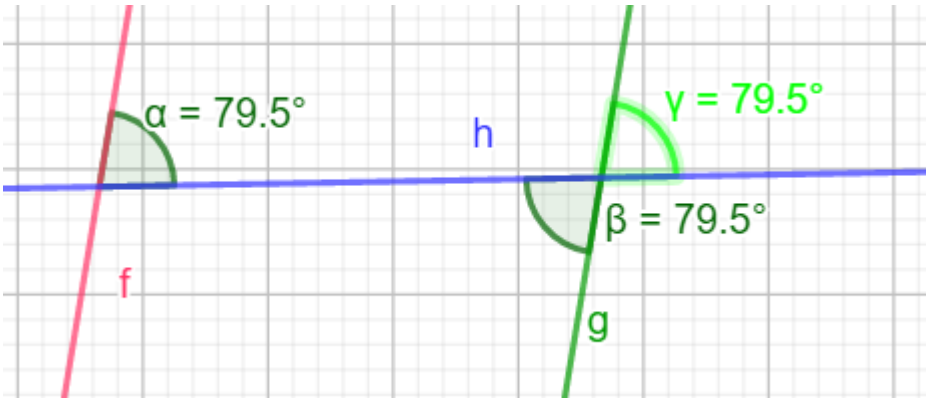




Die parallelen Geraden g und f kann man sich wie Stufen vorstellen, weshalb man die Winkel α und β auch Stufenwinkel nennt. Stufenwinkel befinden sich jeweils auf der gleichen „Seite“ der parallelen Geraden.

Am Graphen sieht man, dass gleiche Farben für gleich große Stufenwinkel stehen. Die Winkel wurden jeweils entlang der Gerden h verschoben, weshalb ihre Größe gleichbleibt.

4. <u>Wechselwinkel</u>



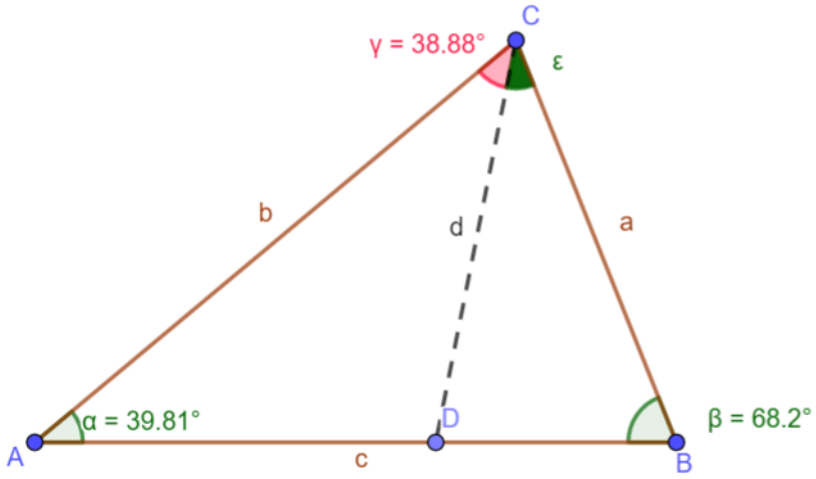
Die Geraden f und g sind parallel zueinander und werden von der Geraden h geschnitten.
Der Winkel γ (gamma) ist der Stufenwinkel zu α, und folglich so groß wie α. Der Winkel β wiederum ist der Scheitelwinkel zu γ. Woraus wiederum folgt, dass β = γ. Daher ist der Winkel α so groß wie β. Da der Winkel β in Bezug zu α die Seite wechselt, nennt man die zwei Winkel Wechselwinkel, sie haben die gleiche Größe.

5. <u>Winkelsumme im Dreieck</u>

Die Summe der drei Winkel in einem Dreieck ergeben zusammen 180°. Es gilt somit für die Winkel
α, β und γ: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Sind zwei Winkel gegeben, so kann man den dritten, durch Umstellen nach der gesuchten Größe berechnen.
Sind z. B. $\alpha = 30°$ und $\beta = 70°$. Nun stellt man den Winkelsummensatz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ nach γ um.

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \mid -\alpha$
$\Leftrightarrow \beta + \gamma = 180° - \alpha \mid -\beta$
$\Leftrightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta$ | Zahlen einsetzen
$\Leftrightarrow \gamma = 180° - 30° - 70° = 80°$

Mithilfe des Winkelsummensatzes kann man im Beispiel den Winkel ε bestimmen.



Da $\gamma + \varepsilon$ beim Punkt C zusammen einen Winkel ergeben, der durch d geteilt ist, gilt:

$\alpha + \beta + (\gamma + \varepsilon) = 180° \mid -\alpha$ Die Klammer kann man weglassen.

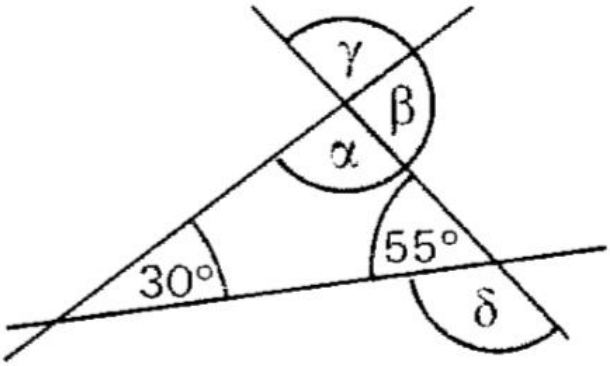
$\Leftrightarrow \beta + \gamma + \varepsilon = 180° - \alpha \mid -\beta$

$\Leftrightarrow \gamma + \varepsilon = 180° - \alpha - \beta \mid -\gamma$

$\Leftrightarrow \varepsilon = 180° - \alpha - \beta - \gamma$ | Zahlen einsetzen

$\Leftrightarrow \varepsilon = 180° - 39{,}81° - 68{,}2° - 38{,}88° = 33{,}11°$

Für folgende Aufgabe muss man Neben- und Scheitelwinkel ins Spiel bringen.



δ (delta) ist der Nebenwinkel zu 55°, also gilt für ihn

$\delta + 55° = 180°$ und somit ist $\delta = 125°$.

Mit dem Winkelsummensatz gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Löst man nach dem gesuchten Winkel auf, so ist

$\alpha = 95°$.

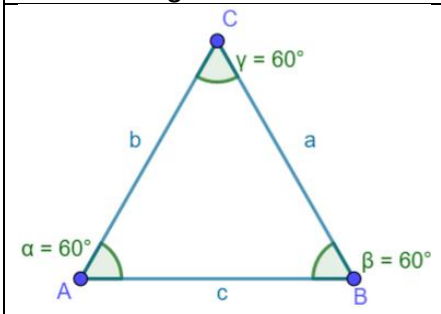
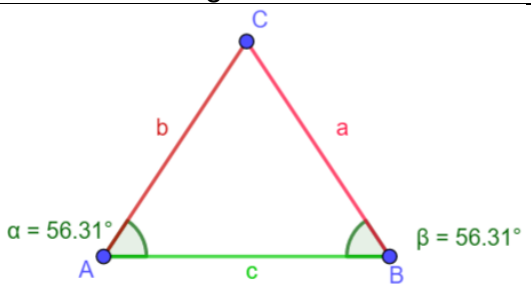
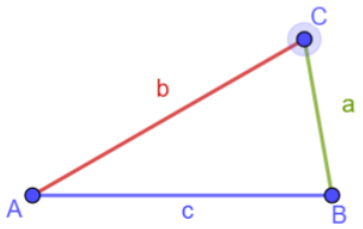
Da β der Nebenwinkel zu α ist, folgt

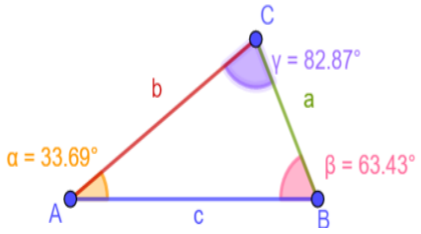
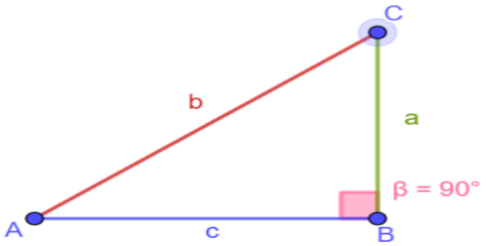
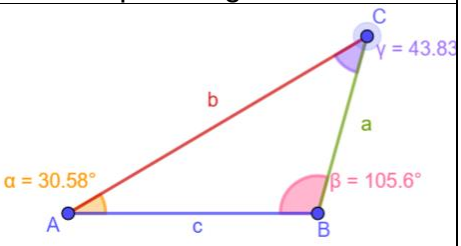
$\beta = 180° - 95° = 85°$.

Da γ der Scheitelwinkel zu α ist, folgt mit $\alpha = \gamma$, $\gamma = 95°$.

6. Dreiecksformen

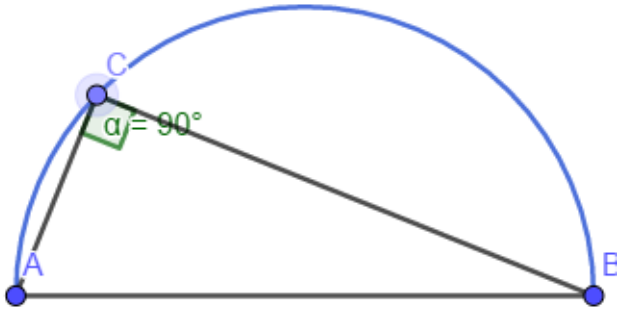
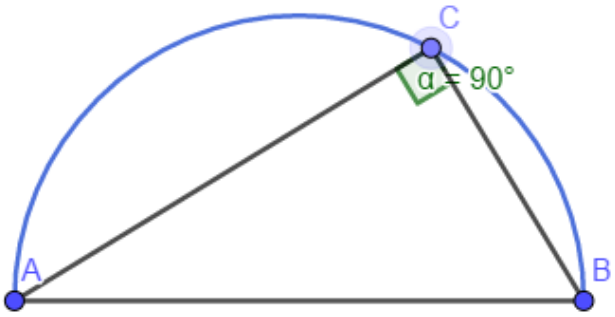
Dreiecke kann man in verschiedene Kategorien aufteilen.

Nach der Länge der Seiten		
Gleichseitiges Dreieck	Gleichschenkliges Dreieck	Allgemeines Dreieck
		
Alle Seiten gleich lang. Alle Winkel sind gleich groß, nämlich 60°	Zwei gleich lange Seiten, diese nennt man Schenkel. Die Winkel an den Schenkeln, die Basiswinkel, sind gleich groß.	Drei verschieden lange Seiten. Somit auch drei unterschiedliche Winkel.

Nach der Größe der Winkel		
Spitzwinkliges Dreieck	Rechtwinkliges Dreieck	Stumpfwinkliges Dreieck
		
Drei spitze Winkel.	Ein rechter Winkel	Ein stumpfer Winkel

7. <u>Satz des Thales</u>

Der Satz des Thales sagt, dass **alle Winkel** in einem **Halbkreisbogen rechtwinklig** sind. Genau gesagt bedeutet das: Ein **Dreieck** aus den beiden Endpunkten des **Durchmessers** eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises, ergibt immer ein **rechtwinkliges Dreieck**.

Der **Satz des Thales** ist einer der ältesten Sätze der Mathematik.

8.