Komplexe Zahlen

© Sascha Hunsicker

Inhalt

1. Einführung 1

2. Arithmetische Form 2

2.1. Rechenregeln 5

3. Polarform 7

4. Exponentialform 11

5. Die schönste Formel der Welt 13

1. Einführung

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung. Würde man nach x auflösen so würde sich ergeben $x = \sqrt{-1}$, was sich bekanntlich nicht berechnen lässt.

Die neue Zahl, welche die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar macht, nennt man imaginäre Einheit und bezeichnet sie mit i. Für sie soll gelten: $i^2 = -1$und folglich $i = \sqrt{-1}$.

Wenn wir voraussetzen, dass für dieses i dieselben Rechengesetze gelten wie für die reellen Zahlen, dann folgt für die Gleichung $x^2 = -1$, mit $x = i = \sqrt{-1}$, dass $x^2 = i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Man sieht, dass $i = \sqrt{-1}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist.

Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ heißt imaginäre Einheit und wird mit i bezeichnet.

Ausdrücke der Form z = a + bi nennt man komplexe Zahlen.

Ist z = a + bi, nennt man a den Realteil von z, a = Re{z} und b den Imaginärteil von z, b = Im{z}.

Real- und Imaginärteil sind beides reelle Zahlen.

Die Menge $\mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der komplexen Zahlen. In ihr kann man ebenfalls die vier Grundrechenarten durchführen.

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt man die Zahl i wie eine Variable

Mithilfe der Wurzelgesetze erhält man z. B. für $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \bullet (-1)} = \sqrt{9} \bullet \sqrt{-1} = 3i$

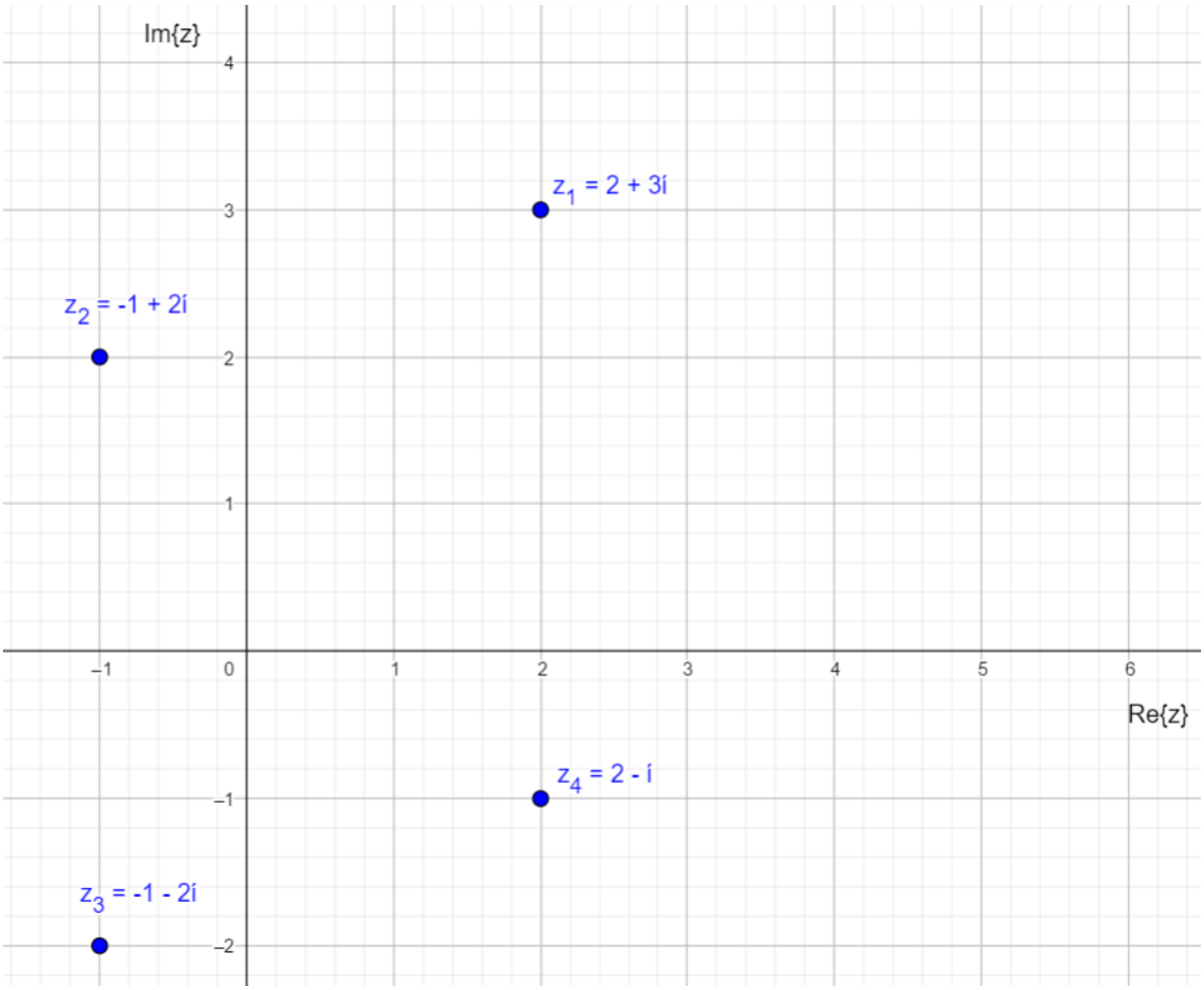
Allgemein gilt: $\sqrt{-a} = \sqrt{a \bullet (-1)} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{-1} = \sqrt{a} \bullet i$

2. <u>Arithmetische Form</u>

Die reellen Zahlen haben wir auf dem Zahlenstrahl dargestellt und graphisch veranschaulicht.
Die komplexen Zahlen kann man ebenfalls visualisieren, nämlich als Punkt in der Ebene, künftig Gauß´sche Zahlenebene genannt.

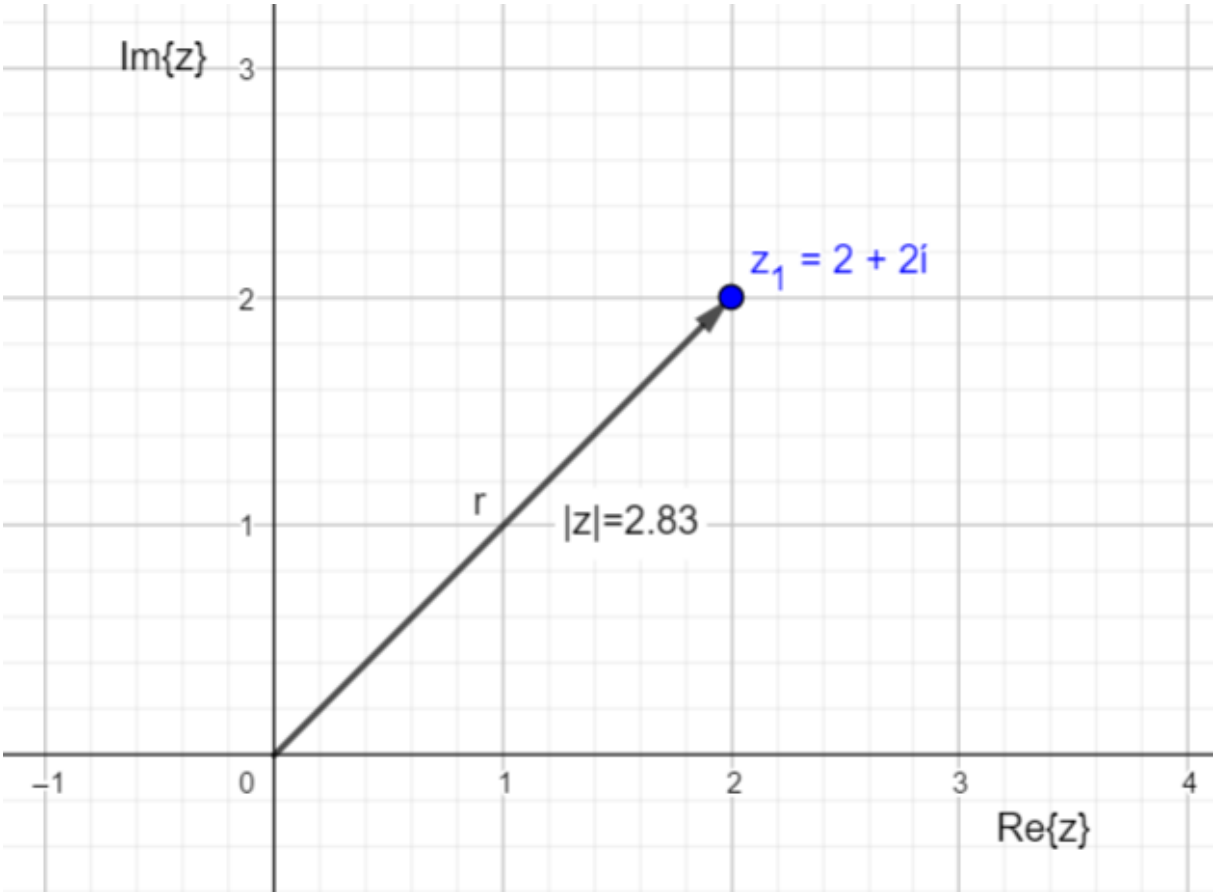
Die komplexe Zahl z = a + bi ist ein Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene.
Der Realteil von z; a = Re{z}; liegt auf der Abszisse, die man reelle Achse nennt.
Der Imaginärteil von z; b = Im{z}; liegt auf der Ordinate, die man imaginäre Achse nennt.

Man kann z = a + bi auch als Zahlenpaar (a; b) schreiben.



Die arithmetische, auch kartesische Form genannt, hat die schon bekannte Darstellung z = a + bi.
Diese Darstellungsform ist geeignet zum Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen.
Die komplexe Zahl wird in der arithmetischen Form als Pfeil bzw. Ortsvektor zum Punkt (a; b) dargestellt.

Die Länge des Pfeils, auch Zeiger genannt, bezeichnet man mit r oder |z|.

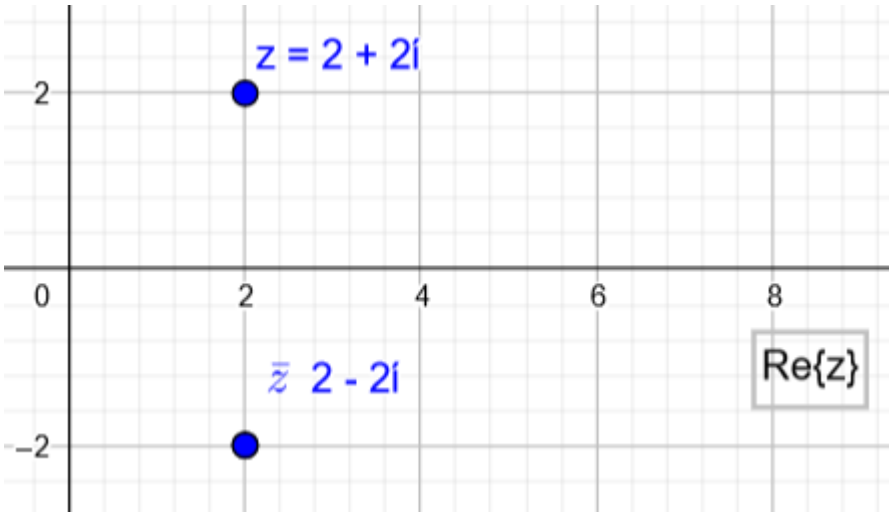


Die Länge des Pfeils berechnet man mithilfe des Satzes von Pythagoras.

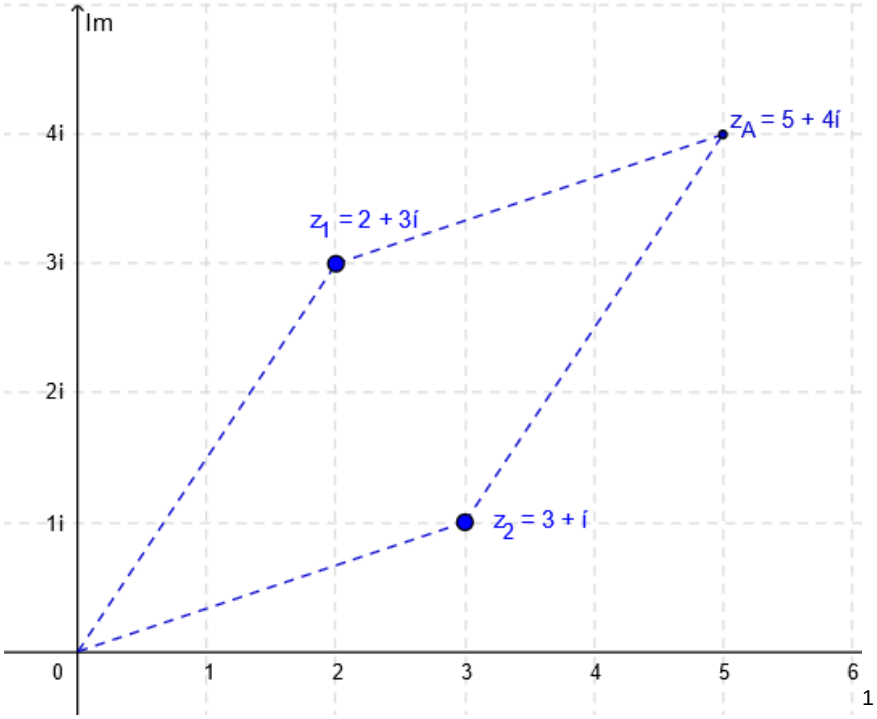
Somit gilt: $|z| = \sqrt{Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2}$

Für obiges Beispiel folgt damit: $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83$

Geometrisch erhält man die konjugiert komplexe Zahl durch Spiegelung von z an der reellen Achse.



In der arithmetischen Form kann man sich die Addition zweier komplexer Zahlen graphisch als Addition ihrer Ortsvektoren vorstellen.



[1]

2.1. Rechenregeln

Für das Rechnen mit komplexen Zahlen gelten folgende Regeln:

$a \cdot i + b \cdot i = (a + b) \cdot i$

$5i + 7i = 12\,i$

$a \cdot b \cdot i = (a \cdot b) \cdot i. \quad a, b \in \mathbb{R}$

$3 \cdot 5i = 15\,i$

Seien $z_1 = a_1 + b_1\,i$; $z_1 = 4 + 7\,i$ und $z_2 = a_2 + b_2\,i$; $z_2 = 9 + 10\,i$, dann gelten für die vier Grundrechenarten folgende Regeln:

Addition:

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\,i) + (a_2 + b_2\,i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$

$z_1 + z_2 = (4 + 7i) + (9 + 10i) = (4 + 9\,) + (7 + 10)\,i = 13 + 17\,i$

[1] [1] https://www.geogebra.org/m/EF7c9AQK

Subtraktion:

$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) i$

$z_1 - z_2 = (4 + 7i) - (9 + 10i) = (4 - 9) - (7 - 10) i = -3 + 1 i$

Bei der Addition und Subtraktion wird komponentenweise addiert bzw. subtrahiert. Das heißt es werden die Realteile addiert bzw. subtrahiert und die Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation:

$z_1 \bullet z_2 = (a_1 + b_1 i) \bullet (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 \bullet a_2 + a_1 \bullet b_2 i + b_1 i \bullet a_2 + b_1 i \bullet b_2 i)$

$= (a_1 \bullet a_2 + a_1 \bullet b_2 i + b_1 i \bullet a_2 + b_1 \bullet b_2 i^2)$ | mit $i^2 = -1$

$= (a_1 \bullet a_2 - b_1 \bullet b_2) + (a_1 \bullet b_2 + a_2 \bullet b_1) i$ | i wird ausgeklammert

$z_1 \bullet z_2 = (4 + 7i) \bullet (9 + 10i)$

$= (4 \bullet 9 + 4 \bullet 10i + 7i \bullet 9 + 7i \bullet 10i)$

$= (36 + 4 \bullet 10i + 7i \bullet 9 + 7 \bullet 10i^2)$

$= (36 - 70) + (40i + 63i)$

$= -34 + 103 i$

Division:

Komplexe Zahlen in der arithmetischen Form werden dividiert, indem man den Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ erhält man, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils vertauscht.

$z = a + b i \rightarrow \bar{z} = a - b i.$

Achtung: Mit $\bar{z}$ ist nicht die Negation von z gemeint!

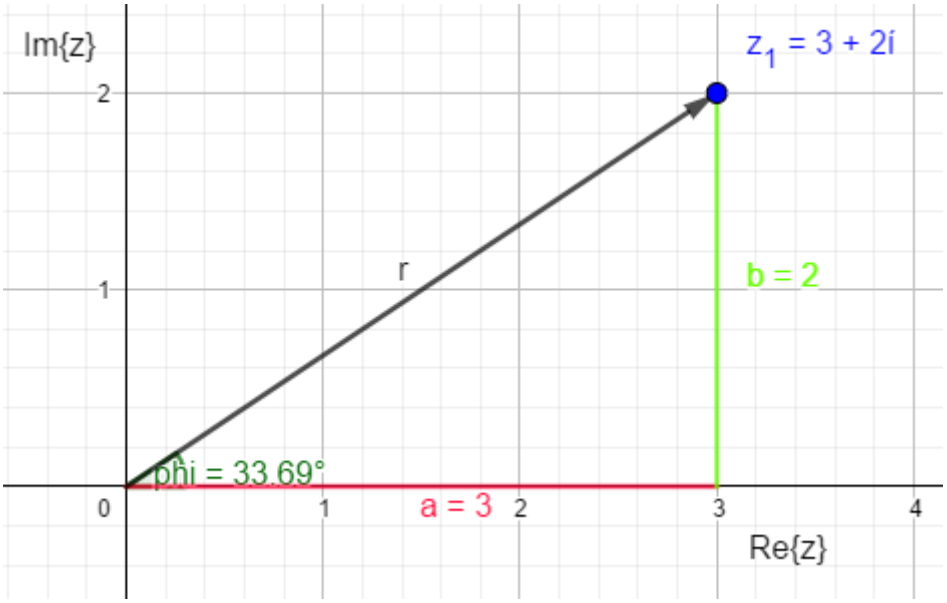
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \bullet \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$ | 3. Binomische Formel im Nenner!

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+7i}{9+10i} = \frac{(4+7i)}{(9+10i)} \bullet \frac{(9-10i)}{(9-10i)} = \frac{36-40i+63i-70i^2}{81-100i^2} = \frac{36+23i+70}{81+100} = \frac{106+23i}{181} = \frac{106}{181} + \frac{23}{181} i$

3. <u>Polarform</u>

Eine andere Darstellungsweise von komplexen Zahlen stellt die Polarform, auch trigonometrische oder goniometrische form genannt, dar. In ihr wird die komplexe Zahl durch die Länge des Zeigers und des Winkels φ eindeutig dargestellt. Der Winkel φ, auch als Argument von z bezeichnet, schließt den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Zeiger ein.

Die Formel zur Berechnung des Betrags ist bereits bekannt: $|z| = \sqrt{Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2}$



Den Winkel φ berechnet man mithilfe der Trigonometrie. Da bezüglich des Winkels φ die Gegen- und Ankathete gegeben sind, berechnet man den Winkel wie folgt:

$\tan \varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Im\{z\}}{Re\{z\}} \mid \tan^{-1}$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}\right) = \arctan\left(\frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}\right) = \arctan \frac{b}{a}$

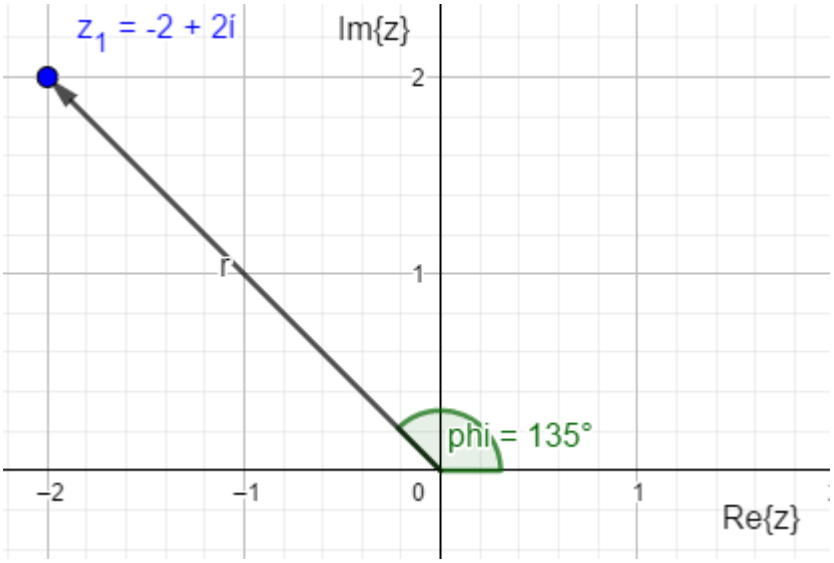
Für obiges Beispiel ergibt sich, mit Re{z} = a = 3 und Im{z} = b = 2,

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69°$

!Achtung!

$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ gilt nur für a > 0

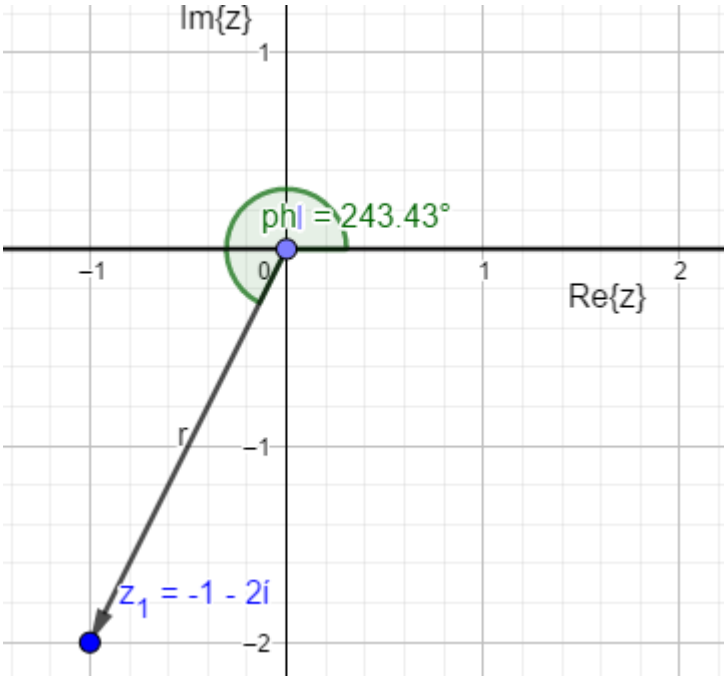
Die komplexe Zahl z = –2 + 2i sieht, dargestellt in der Gauß´schen Zahlenebene wie folgt aus



Der Winkel φ würde mit $\varphi = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{2}{-2} = -45\,°$ ergeben.

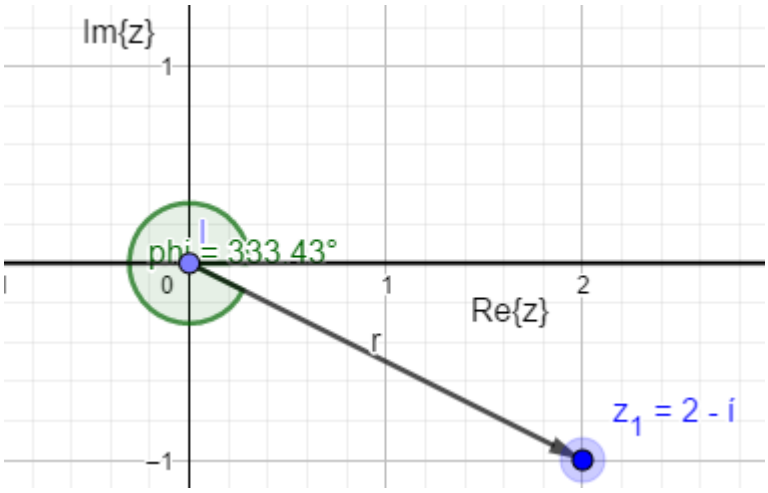
Es ist leicht zu sehen, dass das nicht stimmen kann. Dies ist der Winkel zwischen der negativen reellen Achse und r. Der „echte“ Winkel $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ ist 135° groß und berechnet sich durch φ = 180° + (– 45°) = 135°

Die komplexe Zahl z = –1 – 2i sieht, dargestellt in der Gauß´schen Zahlenebene wie folgt aus



Der Winkel φ würde mit φ = arctan $\frac{b}{a}$ = arctan $\frac{-2}{-1}$ = 63,43 ° ergeben. Auch hier sieht man, dass das nicht der Winkel ist, den der Ortsvektor mit der positiven reellen Achse einschließt. Die 63,43° entsprechen dem Winkel, den der Zeiger mit der negativen reellen Achse einschließt. Um den „echten“ Winkel φ zu erhalten, muss man den berechneten Winkel zu 180° hinzuaddieren und erhält φ = 243,43°.

Die komplexe Zahl z = 2 – i sieht, dargestellt in der Gauß´schen Zahlenebene wie folgt aus



Der Winkel φ würde mit φ = arctan $\frac{b}{a}$ = arctan $\frac{-1}{2}$ = – 26,57 ° ergeben. Auch hier sieht man, dass das nicht der Winkel ist, den der Ortsvektor mit der positiven reellen Achse einschließt. Der Winkel – 26,57° entspricht dem Winkel, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse einschließt. Um den „echten“ Winkel φ zu erhalten, muss man den berechneten Winkel von 360° subtrahieren und erhält φ = 333,43°

Man muss also bei der Berechnung des Winkels φ berücksichtigen in welchem Quadranten sich die komplexe Zahl z befindet.

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, \text{ für } a > 0,\ b > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + 180°; \text{ für } a < 0,\ b \geq 0 \text{ oder } b \leq 0 \\ 360\,° - \arctan \frac{b}{a}; \text{ für } a > 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Die allgemeine Darstellungsform in der Polarform lautet

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Möchte man von der trigonometrischen in die arithmetische Form umrechnen, so geschieht dies, indem man die Klammer auslöst.

$a = r \cdot \cos(\varphi)$ und $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Im Beispiel ist die komplexe Zahl z = 3 + 2i in der arithmetischen Form (z = a + bi) gegeben und soll in die trigonometrische Form umgerechnet werden.

Mit $|z| = \sqrt{Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ und

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69°$

ergibt sich $z = \sqrt{13} \cdot (\cos(33{,}69°) + i\ sind(33{,}69°))$

In der Polarform lassen sich komplexe Zahlen besonders gut multiplizieren und dividieren.

Die entsprechenden Rechenregeln leiten wir nun her.

Es seien $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i\ sind\ \varphi_2)$.

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i\ sind\ \varphi_2)$ | KG und Klammern auflösen)

$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)$ | $i^2 = -1$

$= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]$

$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1\ sind\ \varphi_2$ und $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$ werden mithilfe der Additionstheoreme umgeformt

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

Am besten merkt man sich diese Regeln, indem man sie verbalisiert: „Komplexe Zahlen in der trigonometrischen Form werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.“

Analog hierzu leitet man sich die Regel zur Division her und es ist somit

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos (\varphi 1 - \varphi 2) + i \sin(\varphi 1 - \varphi 2))$

Die Rechenregel hierzu lautet: „Komplexe Zahlen in der trigonometrischen Form werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.“

Bespiel:

Multipliziere und dividiere jeweils die zwei, in der arithmetischen Form gegebenen komplexen Zahlen, in der Polarform:

Sei $z_1 = 6 + 3i$ und $z_2 = 2 + 3i$.

Berechnen der Parameter r und φ

$r_1 = \sqrt{6^2 + 3^3} = \sqrt{45}$ $\quad$ $r_2 = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$

$\varphi_1 = \arctan \frac{3}{6} = 26{,}57°$ $\quad$ $\varphi_2 = \arctan \frac{3}{2} = 56{,}31°$

$z_1 \bullet z_2 = r_1 \bullet r_2 \bullet (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

$= \sqrt{45} \bullet \sqrt{13} \bullet (\cos(26{,}57° + 56{,}31°) + i \sin(26{,}57° + 56{,}31°))$

$= \sqrt{585} \bullet \cos(82{,}88°) + i \sin(82{,}88°)$

Nun rechnet man dies wieder um in die arithmetische Form und erhält durch Auflösen der Klammer $a = \sqrt{585} \bullet \cos(82{,}88°) =$ und $b = \sqrt{585} \bullet \sin(82{,}88°)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \bullet (\cos(\varphi 1 - \varphi 2) + i \sin(\varphi 1 - \varphi 2))$$

$$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{13}} \bullet (\cos(26{,}57° - 56{,}31°) + i \sin(26{,}57° - 56{,}31°))$$

$$= \sqrt{\frac{45}{13}} \bullet (\cos(-29{,}74°) + i \sin(-29{,}74°))$$

Nun rechnet man dies wieder um in die arithmetische Form und erhält durch Auflösen der Klammer $a = \sqrt{\frac{45}{13}} \bullet \cos(-29{,}74°) =$ und $b = \sqrt{\frac{45}{13}} \bullet \sin(-29{,}74°)$

4. Exponentialform

Eine weitere Form komplexe Zahlen darzustellen, stellt die Exponentialform dar.

In dieser Form wird die komplexe Zahl ebenfalls durch die Länge des Ortsvektors und des Winkels φ beschrieben.

Die allgemeine Darstellungsform lautet $z = r \bullet e^{i\varphi}$

In dieser Form kann man komplexe Zahlen recht einfach potenzieren, radizieren und logarithmieren.

Die Rechenregeln können mithilfe der Potenzgesetze recht trivial hergeleitet werden.

Seien $z_1 = r_1 \bullet e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \bullet e^{i\varphi_2}$ dann gelten folgende Regeln

$z_1 \bullet z_2 = r_1 \bullet e^{i\varphi_1} \bullet r_2 \bullet e^{i\varphi_2} = r_1 \bullet r_2 \bullet e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \bullet e^{i\varphi_1}}{r_2 \bullet e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \bullet e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};\ z_2 \neq 0$$

$z^n = (r \bullet e^{i\varphi})^n = r^n \bullet e^{i \bullet n \bullet \varphi}$

Die Umrechnung von der trigonometrischen in die Exponentialform erfolgt mithilfe der Euler´schen Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

Aus der Euler´schen Formel folgt die Rechenregel für das Potenzieren in der Polarform der Satz von Moivre:

$z^n = [r \bullet (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))]^n = r^n \bullet (\cos(n \bullet \varphi) + i \sin(n \bullet \varphi))$

Für das Radizieren gilt folgende Regel: $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \bullet e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k \bullet \frac{360°}{n}\right)}$

Es ist zu beachten, dass es beim komplexen Radizieren n Lösungen gibt!

Beispiel:

Ziehe die zweite Wurzel aus z = 2 + 3i

1.

Berechnen des Betrags und des Arguments von z

$|z| = r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\varphi = \arctan\frac{3}{2} = 56{,}31°$

2.

Darstellung in der Exponentialform

$z = r \bullet e^{i\varphi} = \sqrt{13} \bullet e^{i\,56{,}31°}$

3.

Radizieren in der Exponentialform

$z_0 = \sqrt[2]{\sqrt{13} \bullet e^{i\,56{,}31°}} = \sqrt[2]{\sqrt{13}} \bullet e^{i\left(\frac{56{,}31°}{2} + 0 \bullet \frac{360°}{2}\right)} = \sqrt[4]{13} \bullet e^{i\,28{,}155°}$

$z_1 = \sqrt[2]{\sqrt{13} \bullet e^{i\,56{,}31°}} = \sqrt[2]{\sqrt{13}} \bullet e^{i\left(\frac{56{,}31°}{2} + 1 \bullet \frac{360°}{2}\right)}$

$= \sqrt[4]{13} \bullet e^{i\,(28{,}155° + 180°)} = \sqrt[4]{13} \bullet e^{i\,208{,}155°}$

$z_2 = \sqrt[2]{\sqrt{13} \bullet e^{i\,56{,}31°}} = \sqrt[2]{\sqrt{13}} \bullet e^{i\left(\frac{56{,}31°}{2} + 2 \bullet \frac{360°}{2}\right)}$

$= \sqrt[4]{13} \bullet e^{i\,(28{,}155° + 360°)} = \sqrt[4]{13} \bullet e^{i\,388{,}155°}$

Dreht man sich um 28,155° bzw. um 388,155° so steht man auf der gleichen Position.

Daher ist auch graphisch zu sehen, dass man, um die n – te Wurzel im Komplexen zu ziehen, man nur z_0 bis z_{n-1} berechnen muss.

Ebenso ist zu sehen, dass sich die berechneten Winkel, hier 28,155° und 208,155°, um 360°/n, hier 360°/2, unterscheiden. Dies kann man also Probe benutzen.

Geogebra-Applet zum Radizieren: https://www.geogebra.org/m/B4QXUQq3

4. Die schönste Formel der Welt

Eine Formel, die sich unter anderem aus Elementen der komplexen Zahlen bedient wird als die schönste Formel der Welt bezeichnet. Sie lautet

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Diese Formel wird oft auch als Eulersche Identität bezeichnet.
Der Beweis der Formel ist nicht mal sonderlich schwer.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ | ersetze φ durch π

$= \cos\pi + i\sin\pi$ | $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$

$= -1 + 0$ | $+1$

$e^{i\Pi} + 1 = 0$ q.e.d