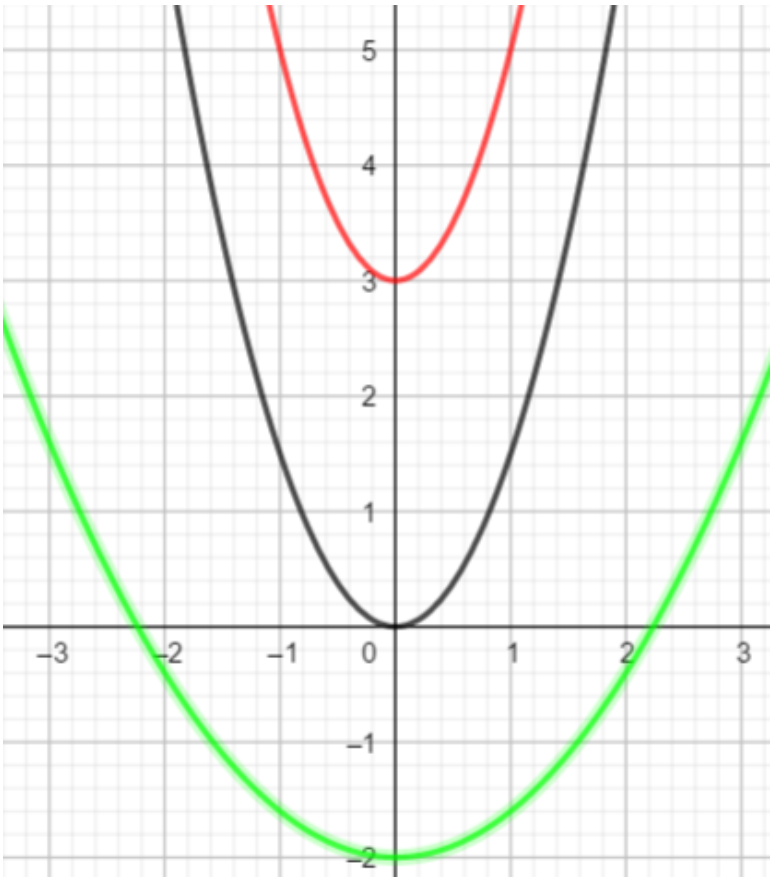
Bei Funktionen interessiert man sich besonders für markante Punkte. Das sind einerseits der Scheitelpunkt selbst und die Art dessen – Hoch- oder Tiefpunkt. Andererseits möchte man wissen wo der Graph die Achsen schneidet.
Für den Schnittpunkt mit der x – Achse gibt es drei Möglichkeiten.




Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 + 3$ hat keinen Schnittpunkt mit der x – Achse.
Der Graph der Funktion $f(x) = 1{,}5x^2$ hat genau einen Schnittpunkt mit der x – Achse.
Der Graph der Funktion $f(x) = 0{,}4x^2 – 3$ hat zwei Schnittpunkte mit der x – Achse.
Eine gemeinsame Eigenschaft der Schnittpunkte mit der x – Achse ist, dass ihre y – Koordinate immer 0 ist. Man nennt diese Schnittpunkte daher auch **Nullstellen**.
Schauen wir uns mal an wie man diese Nullstellen berechnet.

Allgemein berechnet man Nullstellen, indem man f(x) = 0 setzt. Da f(x) = y und bei Nullstellen y = 0 ist, folgt für die Berechnung der Nullstellen f(x) = 0 bzw. y = 0.
Nehmen wir als Beispiel $f(x) = 2x^2 – 4$. Wir schreiben statt f(x) eine 0 → $2x^2 – 4 = 0$ und erhalten eine quadratische Gleichung, die wir nun nach x auflösen.

$2x^2 – 4 = 0 \quad | + 4$

$2x^2 \quad = 4 \quad | : 2$

$x^2 \quad = 2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$ → Achtung: Hier gibt es zwei Lösungen!

$x_1 \quad = \sqrt{2}$

$x_2 \quad = – \sqrt{2}$

Es gibt hier zwei Lösungen, da man $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = – \sqrt{2}$ in die Gleichung einsetzen kann und dann eine wahre Aussage erhält.
Der Scheitelpunkt dieser Funktion liegt bei S(0/– 4). Da a = 2 positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet und somit gibt es auch zwei Nullstellen.

Wäre die Funktion mit gleichem Scheitelpunkt nach unten geöffnet gäbe es kein Nullstellen. Die Funktion hätte dann die Funktionsvorschrift $f(x) = -2x^2 - 4$.
Versuchen wir die Nullstellen zu berechnen.

$-2x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$

$-2x^2 = 4 \quad | : (-2)$

$x^2 = -2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$

Da wir aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel ziehen können, gibt es keine Lösung. Das heißt, dass $f(x) = -2x^2 - 4$ keine Nullstellen hat.
Versuchen wir nun die Nullstellen von $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$ zu bestimmen.

$2x^2 + 12x + 16 = 0 \quad | : 2$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

Wie rechnet man nun weiter?
Quadratische Gleichungen der Art $ax^2 + bx + c = 0$ löst man mit der p – q – Formel oder der abc – Formel.

## Die p – q – Formel

Liegt eine quadratische Gleichung in der Form $x^2 + px + q = 0$ vor, dann kann man sie mithilfe der p – q – Formel lösen. Ist dies nicht der Fall, dann muss man sie in diese Form umformen. Bei $ax^2 + bx + c = 0$ wird durch a dividiert und man erhält dann $x^2 + px + q = 0$.

Die p – q – Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Die Gleichung $2x^2 + 12x + 16 = 0$ haben wir durch Division durch 2 in die Form $x^2 + 6x + 8 = 0$ gebracht. In diesem Fall ist $p = 6$ und $q = 8$. Diese Werte setzen wir in die Formel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ ein und erhalten

$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{(\frac{6}{2})^2 - 8} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1$ | Nun müssen wir jede einzelne Lösung separat berechnen.

$x_1 = -3 + 1 = -2$

$x_2 = -3 - 1 = -4$

Ist der Radikand negativ, dann gibt es keine Lösung. Das wäre z. B. bei der Gleichung

$3x^2 + 12x + 42 = 0$ der Fall. Man dividiert zunächst durch 3, damit a = 1 ist.

$3x^2 + 12x + 42 = 0 \mid : 3$

$x^2 + 4x + 14 = 0 \quad \mid p = 4;\ q = 14$

$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - 14} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 14} = -2 \pm \sqrt{-10}$ Da der Radikand negativ ist gibt es keine Lösung.

## Die abc – Formel

Liegt eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ vor, dann kann man sie mithilfe der abc – Formel lösen.

Aus der Gleichung $3x^2 + 18x + 15 = 0$ kann man a = 3; b = 18 und c = 15 ablesen.

Dies setzt man in die abc – Formel $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ein:

$$x_{1/2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \bullet 3 \bullet 15}}{2 \bullet 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 180}}{6} = \frac{-18 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{-18 \pm 12}{6}$$

$X_1 = -1$; $x_2 = -5$

Probe: $3 \bullet (-1)^2 + 18 \bullet (-1) + 15 = 0$