Potenzen

© Sascha Hunsicker

Juli 2020

Inhalt

1. Definition 2
2. Potenzgesetze 2
2.1. Potenzen mit gleicher Basis 2
2.2. Potenzen mit gleichem Exponenten 3
2.3. Potenzieren von Potenzen 3
2.4. Potenzen mit negativem Exponenten 3
2.5. Potenzen mit gebrochenem Exponenten 4
3. Potenzfunktionen 5
3.1. Gerade positive Exponenten, a > 0 5
3.2. Ungerade positive Exponenten, a > 0 5
3.3. Gerade positive Exponenten, a < 0 6
3.4. Ungerade positive Exponenten, a < 0 6
3.5. Gerade negative Exponenten, a > 0 7
3.6. Ungerade negative Exponenten, a > 0 7
4. Pascalsches Dreieck 8

1. <u>Definition</u>

Die Definition für eine Potenz lautet: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ $\underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots . \bullet \ a}_{n\ Faktoren}$

Hierfür gilt: $a \in R$ und $n \in N \setminus \{1\}$.

Es gilt:

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

Exponent

a^n

Basis

2. <u>Potenzgesetze</u>

   <u>2.1. Potenzen mit gleicher Basis</u>

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert.

$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$

$a^3 \bullet a^5 = a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a = a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a = a^{3+5} = a^8$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten subtrahiert.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a} = a \bullet a \bullet a \ = \ a^{5-3} = a^3$$

2.2. Potenzen mit gleichem Exponenten

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.

$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$

$4^3 \bullet 5^3 = 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 4 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 5 = (4 \bullet 5)^3$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \bullet 3}{4 \bullet 4} = \frac{3}{4} \bullet \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

2.3. Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten mutlitpliziert.

$(a^n)^m = a^{n \bullet m}$

$$(3^2)^4 = 3^2 \bullet 3^2 \bullet 3^2 \bullet 3^2 = 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^{2 \bullet 4} = 3^8$$

2.4. Potenzen mit negativem Exponenten

Rechnet man $\frac{3^2}{3^5}$ ausführlich, so erhält man folgende Regel.

$$\frac{3^2}{3^5} = \frac{a \bullet a}{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a} = \frac{1}{a \bullet a \bullet a} = \frac{1}{a^3} = a^{2-5} = a^{-3}$$

Allgemein gilt also $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

2.5. Potenzen mit gebrochenem Exponenten

Die n-te Wurzel einer Zahl a schreibt man bekanntlich als $\sqrt[n]{a}$.

Dies kann man mithilfe einer Potenz schreiben.

Es gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. → $\sqrt[4]{32} = 32^{\frac{1}{4}}$.

Weiterhin gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. → $\sqrt[7]{2^4} = 2^{\frac{4}{7}}$

Die Schreibweise von Wurzeln als Potenz wird später oft benutzt, um Aufgaben leichter berechnen zu können.

3. Potenzfunktionen

Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^b$ ($b \in \mathbb{Z}$) nennt man Potenzfunktionen.

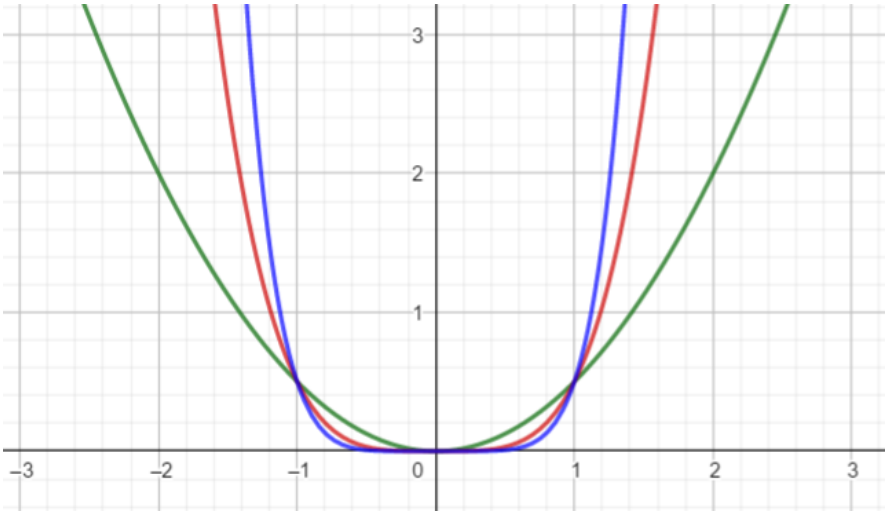
3.1. Gerade positive Exponenten, a > 0

Für $x < 0$ nehmen mit wachsendem x die Funktionswerte ab, für $x > 0$ nehmen sie zu.

$f(x) = 0{,}5x^2$

$f(x) = 0{,}5x^4$

$f(x) = 0{,}5x^6$



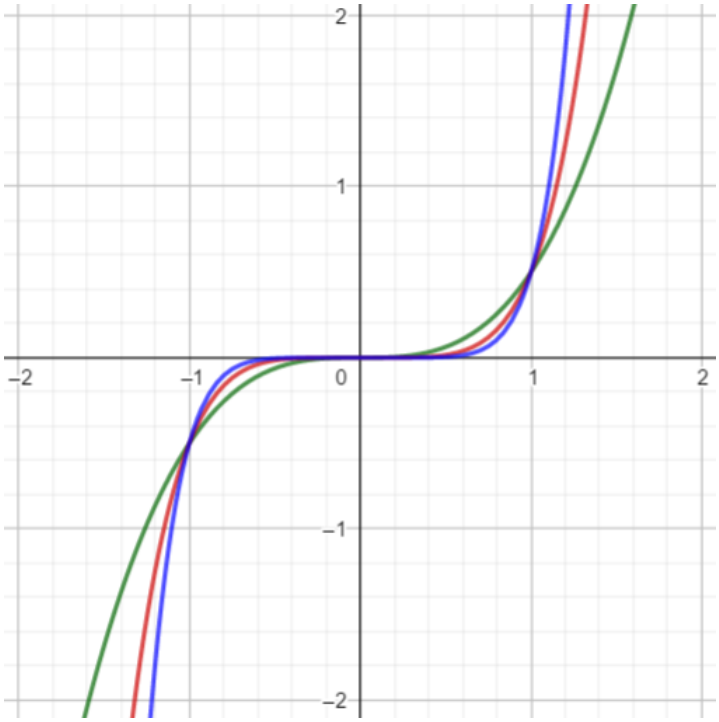
3.2. Ungerade positive Exponenten, a > 0

Für alle $x \in \mathbb{R}$ nehmen mit wachsendem x die Funktionswerte zu.

$f(x) = 0{,}5x^3$

$f(x) = 0{,}5x^5$

$f(x) = 0{,}5x^7$



3.3. Gerade positive Exponenten, a < 0

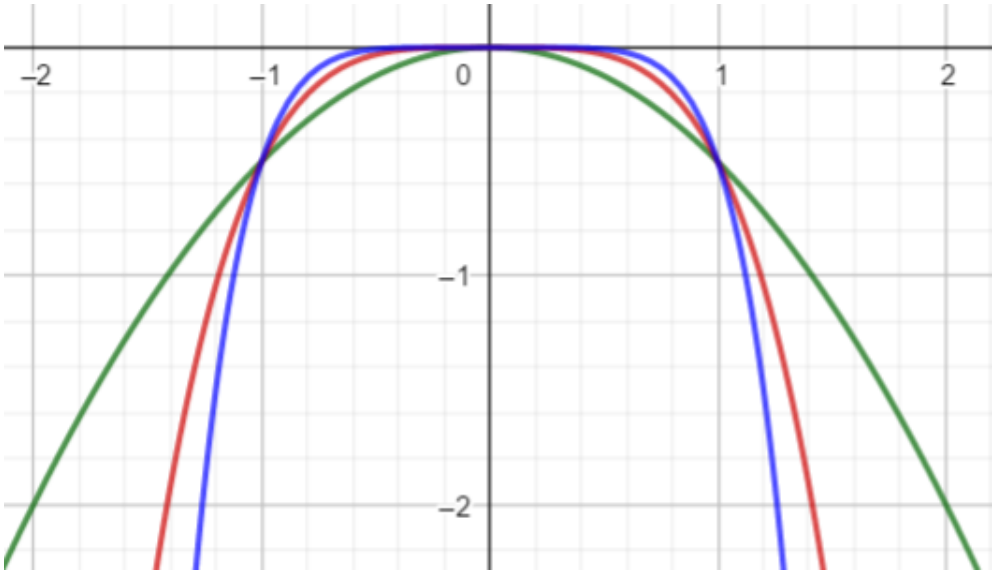
Für x < 0 nehmen mit wachsendem x die Funktionswerte zu, für x > 0 nehmen sie ab.

Die Graphen sind Parabeln, welche achsensymmetrisch zur y – Achse sind.

$f(x) = -0{,}5x^3$

$f(x) = -0{,}5x^5$

$f(x) = -0{,}5x^7$



3.4. Ungerade positive Exponenten, a < 0

Für $x \in \mathbb{R}$ nehmen mit wachsendem x die Funktionswerte ab.

Die Graphen sind für $x \neq 1$ Wendeparabeln. Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

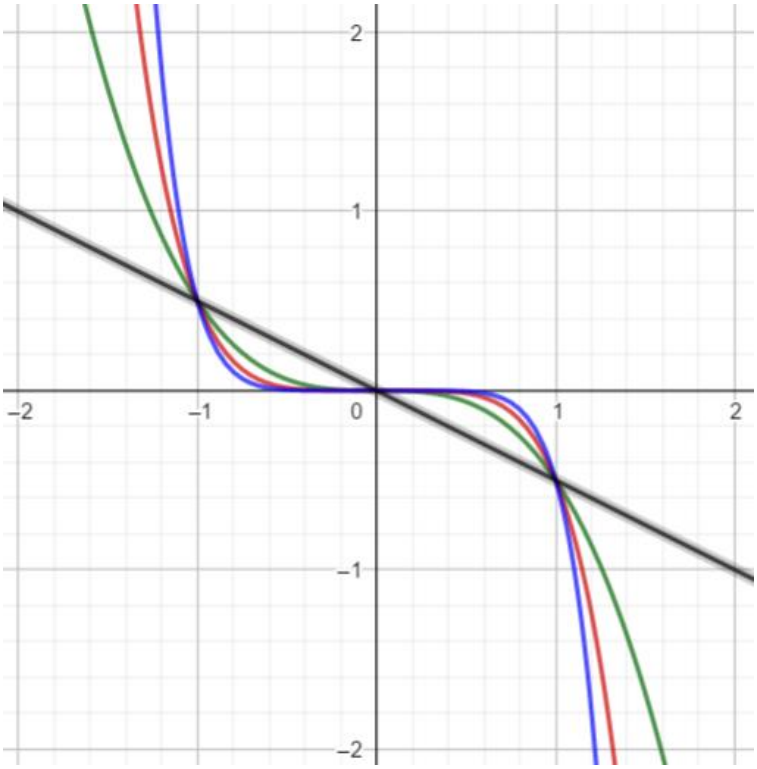
Für x = 1 ist der Graph eine Gerade.

$f(x) = -0{,}5x^3$

$f(x) = -0{,}5x^5$

$f(x) = -0{,}5x^7$

$f(x) = -0{,}5x$



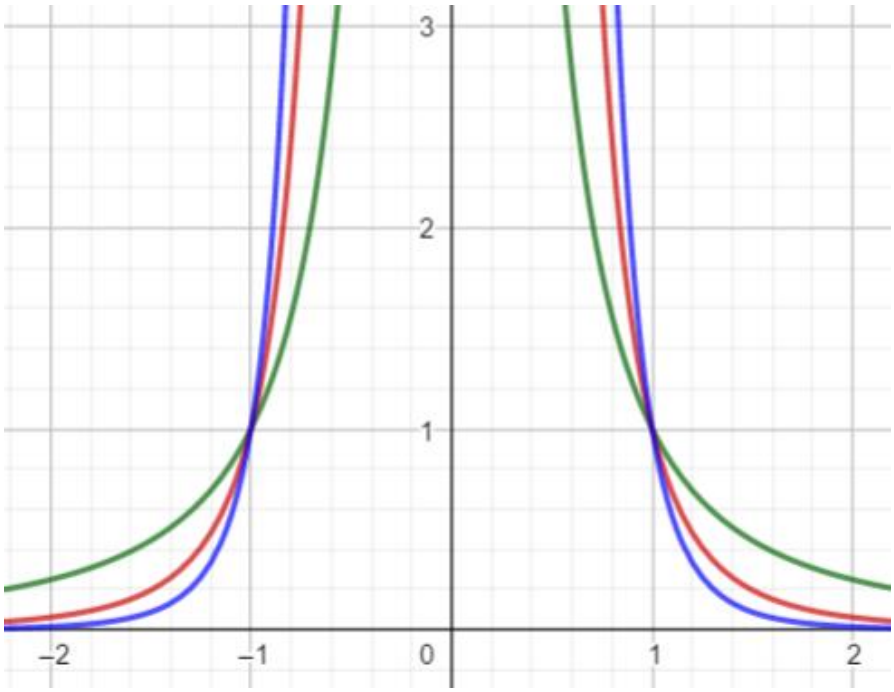
3.5. Gerade negative Exponenten, a > 0

Die Graphen sind Hyperbeln, welche aus zwei Ästen bestehen, die achsensymmetrisch zur y – Achse sind.

$f(x) = x^{-2}$

$f(x) = x^{-4}$

$f(x) = x^{-6}$



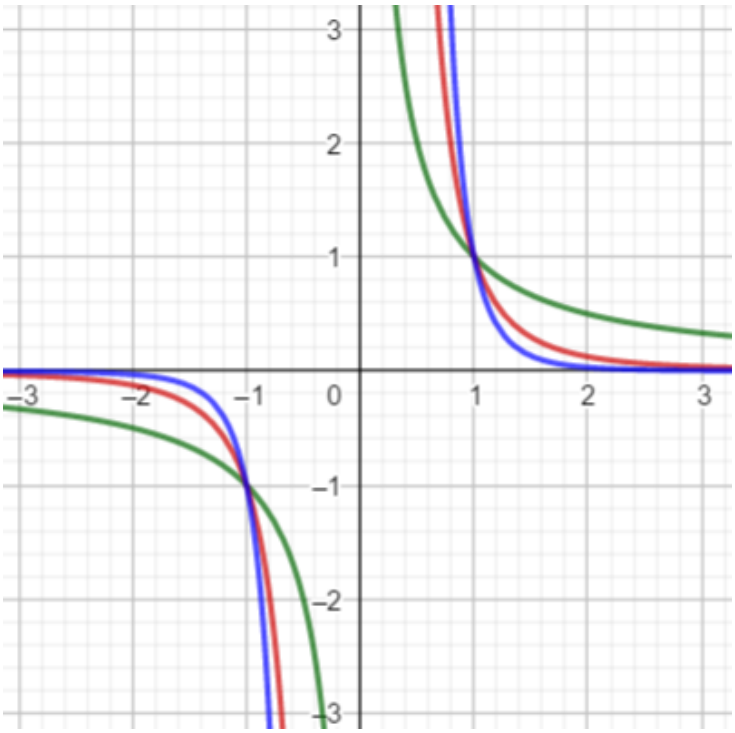
3.6. Ungerade negative Exponenten, a > 0

Die Graphen sind Hyperbeln. Sie bestehen aus zwei Ästen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$f(x) = x^{-1}$

$f(x) = x^{-3}$

$f(x) = x^{-5}$



4. Pascalsches Dreieck

Die drei Binomischen Formeln kennst du bereits.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

$(a –b) \bullet (a + b) = a^2 – b^2$

Was aber ergibt z. B. $(a + b)^5$? Gibt es dafür auch eine Lösungsformel?

Schreiben wir $(a + b)^5$ mal als Potenz: $(a + b) \bullet (a + b) \bullet (a + b) \bullet (a + b) \bullet (a + b)$. Die Lösung ist berechenbar, jedoch recht mühsam.

Mithilfe des Pascalschen Dreiecks, benannt nach dem französischen Mathematiker Blaise Pascal, kann man recht schnell die Lösung bestimmen.

Es gilt:

$(a + b)^0 =$						1					
$(a + b)^1 =$					1a		1b				
$(a + b)^2 =$				$1a^2$		2ab		$1b^2$			
$(a + b)^3 =$			$1a^3$		$3a^2b$		$3ab^2$		$1b^3$		
$(a + b)^4 =$		$1a^4$		$4a^3b$		$6a^2b^2$		$4ab^3$		$1b^4$	
$(a + b)^5 =$	$1a^5$		$5a^4b$		$10a^3b^2$		$10a^2b^3$		$5ab^4$		$1b^5$

Man erkennt, dass außen immer die 1 steht. Die anderen Zahlen, Koeffizienten genannt, bildet man, indem man die Summe der „rechts“ und „links“ darüber stehenden Zahlen bestimmt. Allerdings erst ab $(a + b)^2$.

					1					
				1		1				
			1		2		1			| 2=1+1
		1		3		3		1		| 3=1+2
	1		4		6		4		1	| 4=1+3; 6 = 3+3

Doch wie berechnet man die Exponenten?

Man sieht, dass links außen 1a den Exponenten der Binomischen Formel erhält. Rechts außen verhält es sich mit 1b analog. → Bei $(a + b)^3$ steht $1a^3$ bzw. $1b^3$. Hinter den übrigen Koeffizienten steht jeweils ab. Von links nach rechts wird der Exponent bei a um 1 erniedrigt und bei b um 1 erhöht.

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3\,a^{3-1}b^{0+1} + 3\,a^{2-1}b^{1+1} + 1b^3$$

$$= 1a^3 + 3\,a^2\ \ b^1\ \ + 3\,a^1\ \ b^2\ \ + 1b^3$$

Die allgemeine Formel lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ a^k \bullet b^{n-k}$$

Um diese zu verstehen müssten wir jetzt aber anschauen was das Zeichen Σ bedeutet und wie man sogenannten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ berechnet.