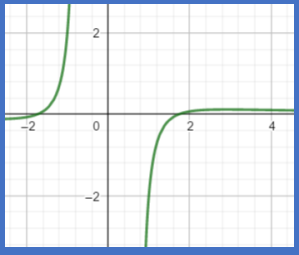
Spickzettel



Gebrochenrationale Funktionen

#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Definition

Eine gebrochenrationale Funktion ist eine Funktion, die sich als Bruch darstellen lässt:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Der Zähler und der Nenner sind jeweils Polynome vom Grad n bzw. m.

Gebrochenrationale Funktionen

Definitionsbereich

Da bei einer Division der Divisor bekanntlich nicht Null sein darf, muss man bei einer gebrochen-rationalen Funktion überprüfen für welche x – Werte der Nenner bzw. der Divisor Null ist.

Hierzu setzt man den Nenner = 0 und löst nach x auf. Die gefundenen Zahlen stellen die Definitionslücken dar.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-2}$

Finde die Nullstellen des Nenners. Setze diesen hierzu = 0.

x – 2 = 0 –> x = 2

Die Zahl 2 ist also die Definitionslücke.

Daraus ergibt sich folgender Definitionsbereich:

D= $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

#matheguru

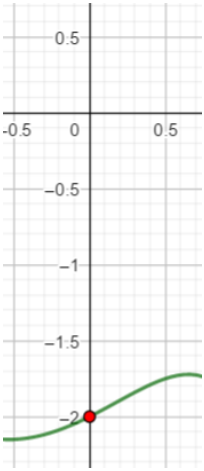
Gebrochenrationale Funktionen

Schnittpunkt mit der y - Achse

Vom Schnittpunkt eines Graphen mit der y – Achse wissen wir, dass x = 0 ist. Um also die Koordinate zu bestimmen, an welcher der Graph die y – Achse schneidet bestimmen wir f(0).

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \bullet 0 + 4}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$S_y(0 / -2)$



#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Schnittpunkte mit der x - Achse

Vom Schnittpunkt eines Graphen mit der x – Achse wissen wir, dass y = 0 ist. Um also die Koordinate zu bestimmen, an welcher der Graph die x – Achse schneidet setzen wir die Funktion = 0.

$$f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-2} = 0$$

Eine Division ergibt dann 0, wenn der Dividend 0 ist

→ $\frac{0}{\triangle} = 0$. Wir müssen also den Zähler 0 setzen.

$x^2 - 3x + 4 = 0$ | p = –3; q = 4

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 4} = -2{,}2$$

$S_x(-2{,}2 / 0)$

#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Asymptote

Unter der Asymptoten versteht man eine Gerade oder eine Parabel, der sich der Funktionsgraph immer mehr annähert, je weiter man auf der x-Achse in Richtung $+\infty$ oder $-\infty$ geht.

Wie kann man die Funktionsgleichung der Asymptoten bestimmen? Man dividiert mittels Polynomdivision den Zähler durch den Nenner. Das Divisionsergebnis stellt dann die Asymptotengleichung dar. Dabei bleibt natürlich ein Rest übrig. Dieser wird für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ dann sehr klein, er geht gegen Null.

Anschaulich kann man sagen, dass der Abstand zwischen dem Funktionsgraphen und der Asymptoten sehr klein wird, wenn man nur auf der x-Achse weit genug nach links oder rechts geht.

#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Asymptote

Anschaulich kann man sagen, dass der Abstand zwischen dem Funktionsgraphen und der Asymptoten sehr klein wird, wenn man auf der x-Achse nur weit genug nach links oder rechts geht.

Nehmen wir die Funktion $f(x)=\frac{x^3-3x^2-4x}{x^2-6x+8}$

Wenn man den Zähler durch den Nenner dividiert ergibt sich:

$(x^3-3x^2-4x):(x^2-6x+8)=x+3$

$\underline{-(x^3 - 6x^2 + 8x)}$

$(3x^2-12x)$

$\underline{-(3x^2 -12x + 24)}$

$6x-24$

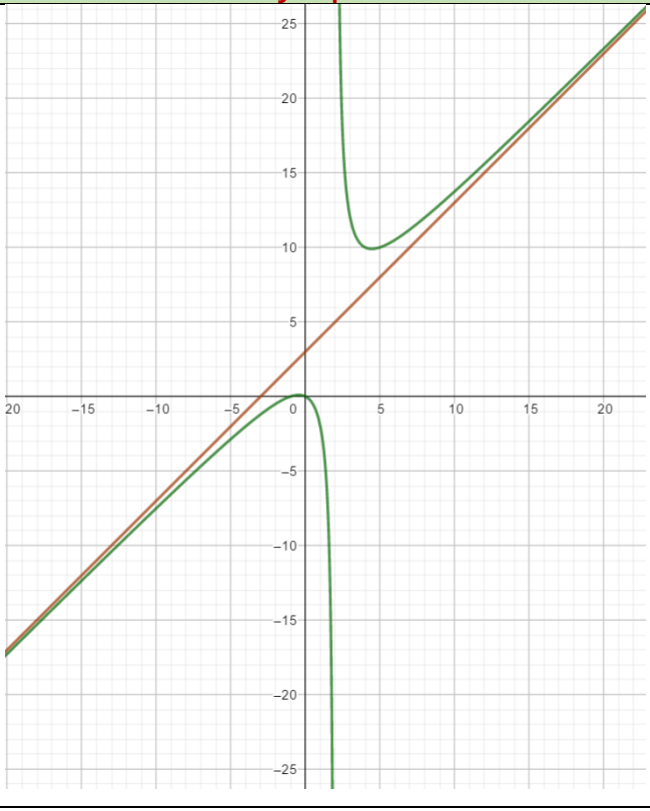
Man erhält $f(x)=\frac{x^3-3x^2-4x}{x^2-6x+8}=x + 3 + \frac{6x - 24}{x^2 - 6x + 8)}$

Strebt x nun gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so strebt auch der Rest gegen 0. Es bleibt x + 3 übrig. Die Asymptote hat also die Gleichung a(x) = x + 3.

#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Asymptote



#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Achsensymmetrie

Achsensymmetrisch zur y- Achse ist eine Funktion genau dann, wenn der Graph auf der rechten Seite spiegelbildlich zum Graphen auf der linken Seite der y – Achse ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn $f(-x) = f(x)$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn ausschließlich gerade Exponenten vorkommen.

Gebrochenrationale Funktionen

Achsensymmetrie

Schauen wir uns mal das Beispiel f(x) = $\frac{x^2+4}{x^4-2}$ an.

Es ist z. B. f(1) = – 5 und f(-1) = – 5.

Allgemein ist in diesem Beispiel

f(-x) = $\frac{(-x)^2+4}{(-x)^4-2} = \frac{x^2+4}{x^4-2}$ = f(x)

Die Funktion f(x) ist also achsensymmetrisch zur

y – Achse.

Gebrochenrationale Funktionen

Punktsymmetrie

Punktsymmetrisch zum Ursprung ist eine Funktion

wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn ausschließlich

ungerade Exponenten vorkommen und kein

absolutes Glied vorhanden ist.

Gebrochenrationale Funktionen

Punktsymmetrie

Im Beispiel ist f(x) = $\frac{x^2-3}{2x^3-x}$.

Es ist z. B. f(1) = -2 und

-f(1) = -2

Allgemein ist in diesem Beispiel

f(-x) = $\frac{(-x)^2-3}{2(-x)^3-(-x)} = \frac{x^2-3}{-2x^3+x} = \frac{x^2-3}{-(2x^3-x)}$

-f(x) = $-\frac{x^2-3}{2x^3-x} = \frac{x^2-3}{-(2x^3-x)}$

Die Funktion ist also punktsymmetrisch zum

Ursprung.

Gebrochenrationale Funktionen

Extrema

Um die Extrema zu bestimmen müssen wir die Nullstellen der ersten Ableitung berechnen. Diese setzen wir in die zweite Ableitung ein und prüfen, ob der Wert > oder < 0 ist.

Gebrochenrationale Funktionen

Extrema

Schauen wir uns mal das Beispiel f(x) = $\frac{x^2 + 8x + 7}{-x + 1}$ an.

u = x² + 8x + 7; u‘ = 2x + 8

v = – x + 1; v‘ = – 1

$$f'(x) = \frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2} = \frac{(2x + 8) \bullet (-x + 1) - [(x^2 + 8x + 7) \bullet -1]}{(-x + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x - 8x + 8 - [(-x^2 - 8x - 7]}{(-x + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x + 8 + x^2 + 8x + 7}{(-x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 15}{(-x + 1)^2}$$

Wir setzen die erste Ableitung = 0

$$\frac{-x^2 + 2x + 15}{(-x + 1)^2} = 0$$

Eine Division ergibt dann Null, wenn der Dividend 0 ist. Daher schauen wir uns nur den Zähler an.

Gebrochenrationale Funktionen

Extrema

Bestimme also $-x^2 + 2x + 15 = 0 \mid \bullet (-1)$

$x^2 - 2x - 15 = 0$. Die Nullstellen lauten $x_1 = -3$; $x_2 = 5$

Nun bestimmen wir die zweite Ableitung, um die gefunden Nullstellen in diese einsetzen zu können.

$u = -x^2 + 2x + 15$; $u' = -2x + 2$

$v = (-x + 1)^2 \rightarrow$ Kettenregel

$i = -x + 1$; $i' = -1$

$a = z^2$; $a' = 2z$

$v' = a' \bullet i' = 2(-x + 1) \bullet (-1) = -2(-x + 1)$

Gebrochenrationale Funktionen

Extrema

$$f''(x) = \frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2} =$$

$$= \frac{(-2x+2) \bullet (-x+1)^2 - [(-x^2+2x+15) \bullet (-2\,(-x+1)]}{((-x+1)^2)^2}$$

Wir kürzen hier mit $(-x + 1)^1$

$$= \frac{(-2x+2)\bullet(-x+1)-\left[\left(-x^2+2x+15\right)\bullet(-2)\right]}{(-x+1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-\left[2x^2-4x-30\right]}{(-x+1)^3} = \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+30}{(-x+1)^3}$$

$$= \frac{32}{(-x+1)^3}$$

$$f''(-3) = \frac{32}{(-(-3)+1)^3} = \frac{32}{64} > 0 \rightarrow \text{TP}$$

$$f''(5) = \frac{32}{(-5+1)^3} = \frac{32}{(-4)^3} < 0 \rightarrow \text{HP}$$

#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Extrema

Um die Koordinaten der Extrema zu bestimmen,

setzen wir die Nullstellen in f(x) ein.

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 + 8 \bullet (-3) + 7}{-(-3) + 1} = \frac{9 - 24 + 7}{4} = -2 \rightarrow TP(-3/-2)$$

$$f(5) = \frac{5^2 + 8 \bullet 5 + 7}{-5 + 1} = \frac{25 + 40 + 7}{-4} = -18 \rightarrow TP(5/-18)$$

Gebrochenrationale Funktionen

Wendepunkte

Um die Wendepunkte zu bestimmen setzen wir die zweite Ableitung = 0.

$$f''(x) = \frac{32}{(-x+1)^3} = 0$$

Auch hier schauen wir uns nur den Nenner an und erhalten: 32 = 0. Hieraus folgt, dass es keine Wendepunkte gibt.

Gebrochenrationale Funktionen

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{x^2 + 8x + 7}^{\infty}}{\underbrace{-x + 1}_{\infty}} = \frac{\overbrace{2x + 8}^{-\infty}}{\underbrace{-1}_{-1}} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2 + 8x + 7}^{\infty}}{\underbrace{-x + 1}_{-\infty}} = \frac{\overbrace{2x + 8}^{\infty}}{\underbrace{-1}_{-1}} = -\infty$$

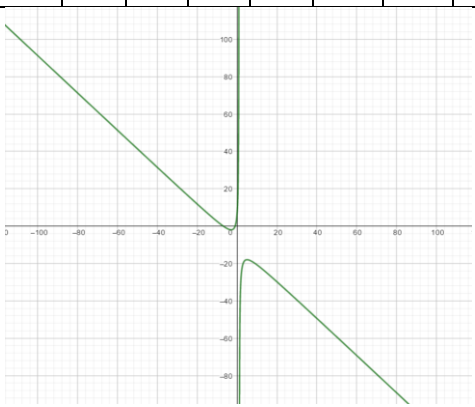
#matheguru

Gebrochenrationale Funktionen

Graph

Um einen Graphen zu zeichnen müssen wir zuerst die Wertetabelle erstellen. Es sollten alle Merkmale der Funktion im Graphen ersichtlich sein.

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	-1,8	–2	$-\frac{5}{3}$	0	7	/	–27	–20	$-\frac{55}{3}$	-18



#matheguru